

前 言

天津大学力学系开展振动结构模态分析(以下简称模态分析)的研究和教学工作已有 20 年。其间,为一般力学、结构工程、机械电子工程、水利工程、船舶工程、内燃机、汽车、核物理等专业的研究生和高年级本科生开设了模态分析课程。特别是自 20 世纪 80 年代初,天津大学力学系对模态分析的研究和应用有了很大发展,完成了多项科研项目,提出了适于大型结构的、简单而实用的分区模态综合法和随机冲击激励技术。

早在 1987 年,萧龙翔教授就已编写了《振动结构模态分析基础》一书。此书在历届学生的使用中收到了良好效果。在该书的基础上,我们总结了近二十年的工作经验,纳入了最近的研究内容,并吸收了国内外同行的大量研究成果,重新编写了这部著作。

20 世纪 70 年代到 80 年代中期,是模态分析理论及技术实现的成熟阶段,并逐步在各个工程领域内应用。此时航空、航天、机械、化工、交通、结构、水工、船舶、核能、内燃机等涉及振动工程的领域都有模态分析的应用,模态分析已从研究机构走向各个工程设计单位。作为一种有效、可靠的测试手段,模态分析已成为结构设计中一项常规的辅助方法。在各高等工科院校,也相继开设了模态分析课程。该课程并逐步由一门力学专业基础课转变成一门相关学科的专业基础课。它不仅作为研究生的专业技术课,也成为高年级本科生的专业选修课。

80 年代中期到 90 年代,是模态分析应用的黄金时期。在结构动力修改、结构优化设计、故障诊断、状态监测、声学分析等诸多领域内,模态分析由单一、直接应用发展到与多种方法的综合应用,特别是围绕实验模态分析(EMA)和有限元法(FEM)两种基本方法,在众多领域开展了大量的工程应用研究工作,提出了繁多的综合研究方法,使结构动态设计日趋成熟。

有关模态分析的著作并不多见,作为高等院校相关专业的教材更是凤毛麟角。鉴于此,本书并不完全以专著形式编写,而是兼顾教材的特点,以模态分析的基本理论、基本方法为主线,兼论模态分析的最新动态。在编写中力求做到前后统一,包括符号的使用和内容的联系等方面。所有方法的推导力求严谨、准确、完整,并尽量用矩阵运算,以期简明。在每章后面都附有思考题,以帮助学生巩固所学内容。本书最后附有实验指导书,便于实验教学。

本书只限于论述线性模态分析。近几年来,以现代非线性动力学理论为基础的非线性模态分析悄然兴起,并成为非线性振动研究中的热点之一。其原因是工程研究中存在着大量的非线性问题,以传统的线性模态分析无法得到准确结果,

迫切需要提出新的理论和方法加以解决。由于非线性模态分析理论尚不成熟,应用更有困难,故未列入本书。

本书共分6章。第1章为模态分析理论基础,论述线性模态分析的基础理论;第2章为时间历程的测量,论述有关实验模态分析的时域振动信号测试技术;第3章为动态测试后处理,论述非参数模型识别的基本处理方法;第4章为模态参数识别的频域方法,介绍常用的单模态识别法、多模态识别法及分区模态综合法和频域整体识别法;第5章为模态参数识别的时域方法,介绍常用的局部识别法和整体识别法,包括单入单出(SISO)、单入多出(SIMO)和多入多出(MIMO)识别法;第6章为模态分析在工程中的应用,介绍模态分析在结构性能评价、结构动态设计、故障诊断、状态监测及声控分析等方面的应用方法及工程实例,特别是将结构动态设计中的众多方法进行了系统整理,归纳为六大类问题,即载荷识别、灵敏度分析、物理参数修改、物理参数识别、再分析和结构优化设计。这种归类使模态分析在结构动态设计中的应用一目了然。

本书第1、3、4、5章及第6章大部分内容由曹树谦编写,第2章及第6章第2节和实验指导书由张文德编写。整体思路由萧龙翔主持共同讨论拟定。郎作贵高级工程师对全书提出了许多宝贵意见,陈璐女士对全书的数次易稿进行了文字处理并制作了多幅插图,孙洪军也提供了许多帮助。在此一并致谢。

天津大学霍拳忠、徐燕申两位教授对本书进行了全面、细致的审阅,作者特别在此致谢。本书还得到国家工科力学教学基地、天津市教委资助项目、天津市21世纪青年基金项目的支持。由于编者水平所限,书中错误在所难免,恳请同行不吝赐教。

编者

2000年8月

缩 写 表

AR	自回归(Autoregressive)
ARMA	自回归滑动平均(Autoregressive Moving-average)
DFT	离散傅里叶变换(Discrete Fourier Transform)
DSP	数字信号处理(Digital Signal Process)
EMA	实验模态分析(Experimental Modal Analysis)
ERA	特征系统实现法(Eigensystem Realization Algorithm)
FEM	有限元法(Finite Element Method)
FFT	快速傅里叶变换(Fast Fourier Transform)
FT	傅里叶变换(Fourier Transform)
IDFT	逆离散傅里叶变换(Inverse Discrete Fourier Transform)
IFT	逆傅里叶变换(Inverse Fourier Transform)
IRF	脉冲响应函数(Impulse Response Function)
IRS	改进系统缩聚法(Improved Reduced System)
ITD	ITD法(Ibrahim Time Domain Technique)
LPF	低通滤波器(Low-Pass Filter)
LSE	最小二乘估计(Least Squares Estimate)
LSCE	最小二乘复指数法(Least Squares Complex Exponential Method)
MA	滑动平均(Moving-average)
MAC	模态幅值相干系数(Modal Amplitude Coherence)
MCF	模态置信因子(Modal Confidence Factor)
MIMO	多输入多输出(Multi-input Multi-output)
MPC	模态相位共线性(Modal Phase Collinearity)
MSCC	模态形状相关系数(Modal Shape Correlation Coefficient)
OAMCF	总体模态置信因子(Overall Modal Confidence Factor)
PRCE	多参考点复指数法(Polyreference Complex Exponential Method)
FRF	频率响应函数(Frequency Response Function)
SIMO	单输入多输出(Single-input Multi-output)
SISO	单输入单输出(Single-input Single-output)
STD	STD法(Spare Ibrahim Time Domain Technique)
WLSE	加权最小二乘估计(Weight Least Squares Estimate)

主 要 符 号 表

a_i, b_i	粘性阻尼系统复模态参数
a_p	Prony 多项式系数
A, B, A_1, B_1	ERA 法中的系统矩阵
c, C	粘性阻尼系数, 粘性阻尼阵
c_{mi}	复模态粘性阻尼系数
D_i	位移自由响应幅值列阵
$\text{diag}[]$	对角阵
D'	时移算子
E	误差总方差
e, f	右下角标, 代表矩阵中行、列号或响应、激励点号

$E[\cdot]$	数学期望
E_w	加权误差总方差
$F, F(\omega)$	简谐激振力幅值, 激振力傅氏谱
$\mathcal{F}, \mathcal{F}^{-1}$	傅氏变换, 逆傅氏变换
$\mathbf{F}, \mathbf{F}(\omega)$	简谐激振力幅值列阵, 激振力傅氏谱列阵
$F(s), \mathbf{F}(s)$	激振力拉氏变换, 激振力拉氏变换列阵
$f(t), \mathbf{f}(t)$	激振力, 激振力列阵
$\mathbf{f}'(t)$	状态空间中激振力列阵
\mathbf{G}	结构阻尼矩阵、ERA 法中的观测矩阵
g, g_i	结构阻尼系数
g_{ik}	结构阻尼系统复特征阻尼
$G_{ff}(\omega)$	$f(t)$ 的(单边)自功率谱密度函数
$G_{fx}(\omega)$	$f(t)$ 、 $x(t)$ 的(单边)互功率谱密度函数
g_m	复模态结构阻尼
H	右上角标, 代表共轭转置
$H(s), \mathbf{H}(s)$	传递函数, 传递函数矩阵
$h(t), \mathbf{h}(t)$	脉冲响应函数, 脉冲响应函数矩阵
$H(z), \mathbf{H}(z)$	Z 变换形式的频响函数, Z 变换形式的频响函数矩阵
$H(\omega), \mathbf{H}(\omega)$	(位移)频响函数, (位移)频响函数矩阵
$H_1(\omega), H_2(\omega), H_k(\omega) $	频响函数的三种估算形式
$H_A(\omega)$	加速度频响函数
$H_e(\omega), H_e(s)$	原点频响函数和传递函数(e 点)
$H_f(\omega), H_f(s)$	跨点频响函数和传递函数(e 、 f 点)
$H_V(\omega)$	速度频响函数
$H_L(\omega)$	频响函数的一种无偏估计
$ H(\omega) , H^R(\omega), H^I(\omega)$	幅频特性, 实频特性, 虚频特性
$\mathbf{H}_0(\omega), \mathbf{Z}_0(\omega)$	结构修改前频响函数矩阵和阻抗阵
i	右下角标, 代表自由度标号、模态标号
\mathbf{I}	单位矩阵
j	虚数单位
J, \mathbf{J}	目标函数, Jacobi 矩阵
k, \mathbf{K}	标号, 代表采样点号, 刚度, 刚度阵
k_{ik}	结构阻尼系统复特征刚度
k_m	复模态刚度
$\mathcal{L}, \mathcal{L}^{-1}$	拉氏变换, 逆拉氏变换
\mathbf{L}	Lagrange 乘子矩阵
m, \mathbf{M}	质量, 质量阵
$\mathbf{M}_0, \mathbf{K}_0, \mathbf{C}_0$	FEM 中物理参数阵或结构修改前物理参数矩阵
m_{ik}	结构阻尼系统复特征质量
m_m	复模态质量
n	系统自由度数、模态数或频域谱线标号
N	一次采样数、谱线数
N_d	显示有效谱线数

$N(s)$	$Z(s)$ 的伴随矩阵
P, Q	粘性阻尼系统状态方程系数矩阵
$p(j\omega), q(j\omega)$	频响函数(传递函数)有理分式中的多项式或正交多项式列阵
p_m	参数
$P(z)$	Prony 多项式
R, l	角标,代表实、虚部
$\text{rank}()$	秩
r_{eff}	结构阻尼系统中相当于留数的模态参数
$R_{ff}(\tau)$	$f(t)$ 的自相关函数
$R_{fr}(\tau)$	$f(t), x(t)$ 的互相关函数
R_i	第 i 阶留数矩阵
$s = \sigma + j\omega$	拉氏变换域
$S_{ff}(\omega)$	$f(t)$ 的(双边)自功率谱密度函数(自功率谱或自谱)
$S_{fr}(\omega)$	$f(t), x(t)$ 的(双边)互功率谱密度函数(互功率谱或互谱)
s_i	特征值、极点、复频率
$S(F p_m)$	F 对 p_m 的 -1 阶灵敏度
$S_l(F p_m)$	F 对 p_m 的 l 阶灵敏度
t	时间
T	时间周期、样本长度
T	右上角标,代表转置
U, V	模态坐标系中稳态位移(速度)响应幅值列阵
U_i, V_i	留数 $R_{eff} = \phi_a \phi_{fi} / a_i$ 的实部和虚部
W	权矩阵
$w(t)$	窗函数
$W(\omega), W(f)$	窗函数的傅氏谱
x, \mathbf{x}	位移,位移列阵
$X, X(\omega)$	稳态位移响应幅值,稳态位移响应傅氏谱
$\mathbf{X}, \mathbf{X}(\omega)$	稳态位移响应幅值列阵,稳态位移响应傅氏谱列阵
$X(s), \mathbf{X}(s)$	位移拉氏变换,位移拉氏变换列阵
\mathbf{x}'	状态空间矢量
\mathbf{y}	模态坐标位移矢量、状态空间矢量
$-Y_{eff}/\omega^2, Z_{eff}$	频响函数 $H_{eff}(\omega)$ 的修正质量项和修正刚度项
Y_R, Y_I	Y_{eff} 的实部和虚部
\mathcal{Z}	Z 变换
$Z_A(\omega)$	加速度阻抗
Z_R, Z_I	Z_{eff} 的实部和虚部
$Z(s), \mathbf{Z}(s)$	阻抗,阻抗矩阵
$Z_V(\omega)$	速度阻抗
$Z(\omega), \mathbf{Z}(\omega)$	(位移)阻抗, (位移)阻抗矩阵
α, β	频响函数(传递函数)有理分式中由 α_i, β_i 组成的列阵
α_i, β_i	频响函数(传递函数)有理分式中的特征参数
a_s, a_k	特征矢量灵敏度中的系数
Γ	模态参与因子矩阵

$\gamma^2(\omega)$	相干函数
$\delta(t)$	δ 函数
$\delta(\tau)$	随机减量特征信号
$\Delta f, \Delta\omega$	频率分辨率或频率间隔
$\Delta M, \Delta K, \Delta C$	修正质量阵, 修正刚度阵, 修正阻尼阵
Δt	采样时间间隔、时间间隔
$\Delta(s) = Z(s) $	特征多项式
$\Delta\omega, \Delta\Omega$	半功率带宽, 相对半功率带宽
ε	误差列阵
ζ, ζ_i	粘性阻尼比
η, η_i	损耗因子、结构阻尼比
η_{mi}	复模态结构阻尼比
θ, θ_i	初相角
λ, λ_i	特征值或复频率
Λ	谱矩阵
σ, σ_i	衰减系数(衰减指数)
σ^2	协方差
σ_{mi}	复模态粘性阻尼衰减系数
Σ	奇异值分解中以奇异值为(部分)对角元的矩阵
τ	时间延迟、时间
$\varphi, \varphi_i, \varphi$	相角, 实模态矢量(实特征矢量), 实模态矩阵
ψ_i, ψ	复模态矢量, 复模态矩阵
ψ_i', ψ'	状态空间复特征矢量, 复特征矢量矩阵
ω, f	角频率, 频率
Ω	无量纲频率(频率比)
ω_0, ω_{0i}	无阻尼固有频率(固有频率)
ω_d, ω_{di}	阻尼固有频率
ω_D	位移谐振频率
ω_m, f_m, f_{max}	分析信号中最高频率
$\omega_{m,di}$	复模态阻尼固有频率(特征频率)
ω_{mi}	复模态频率
ω_N	Nyquist 频率(混叠频率)
ω_s, f_s	采样圆频率, 采样频率
+	右上角标, 代表 Moore-Penrose 广义逆
-	上标, 代表取平均(统计平均); 右上角标, 代表广义逆
-T	右上角标, 代表求转置(或逆)后再求逆(或转置)
*	卷积; 右上角标, 代表共轭
~	上标, 代表序列信号或实测信号
·, ··	上标, 代表对时间求一或二次导数
\odot	直积(Hadamard 积)
$\ \cdot\ $	范数
$\ \cdot\ _2$	2 范数
$\ \cdot\ _F$	F 范数

目 录

缩 写 表	(I)
主要符号表	(I)
绪 论	(1)
思考题	(3)
第 1 章 模态分析理论基础	(5)
1.1 引 言	(5)
1.2 单自由度系统的振动	(5)
1.3 单自由度系统频响函数的各种表达形式及其特征	(11)
1.4 多自由度系统的实模态分析	(17)
1.5 多自由度系统的复模态分析	(27)
1.6 拉氏变换的方法	(35)
1.7 常用激励下的频响函数、频响函数与脉冲响应函数的物理意义	(40)
思考题	(47)
第 2 章 时间历程的测量	(50)
2.1 引 言	(50)
2.2 试验结构的支撑方式	(50)
2.3 激励方式	(52)
2.4 激励装置	(55)
2.5 激励信号	(57)
2.6 测量系统	(61)
2.7 激振器试验	(69)
2.8 冲击试验	(73)
思考题	(77)
第 3 章 动态测试后处理	(78)
3.1 引 言	(78)
3.2 从无限长连续信号到有限长离散信号的实现过程	(78)
3.3 采样、采样定理和混频现象	(80)
3.4 泄漏和窗函数	(83)
3.5 离散傅里叶变换	(89)
3.6 选带分析技术	(91)
3.7 平均技术	(93)
3.8 噪声对频响函数估算形式的影响	(96)
3.9 动态测试后处理综述	(101)
思考题	(102)
第 4 章 模态参数识别的频域方法	(104)
4.1 引 言	(104)

4.2	最小二乘法	(105)
4.3	单模态识别之一:最小二乘圆拟合法	(109)
4.4	单模态识别之二:差分法	(115)
4.5	多模态识别之一:非线性加权最小二乘法	(117)
4.6	多模态识别之二:直接偏导数法	(122)
4.7	多模态识别之三:Levy 法	(126)
4.8	多模态识别之四:正交多项式拟合法	(130)
4.9	分区模态综合法	(132)
4.10	频域总体识别法	(134)
4.11	模态矢量的归一化与动画显示	(138)
	思考题	(139)
第 5 章	模态参数识别的时域方法	(140)
5.1	引言	(140)
5.2	随机减量技术	(141)
5.3	ITD 方法	(144)
5.4	最小二乘复指数法(LSCE)	(152)
5.5	ARMA 时序分析法	(156)
5.6	多参考点复指数法(PRCE)	(161)
5.7	特征系统实现法(ERA)	(165)
	思考题	(173)
第 6 章	模态分析在工程中的应用	(174)
6.1	引言	(174)
6.2	模态分析在结构性能评价中的直接应用	(175)
6.3	模态分析在结构动态设计中的应用综述	(180)
6.4	载荷识别	(182)
6.5	灵敏度分析	(187)
6.6	物理参数修改	(193)
6.7	物理参数识别	(205)
6.8	再分析	(211)
6.9	结构优化设计	(221)
6.10	模态分析在故障诊断和状态监测中的应用	(225)
6.11	模态分析在声控方面的应用	(229)
	思考题	(231)
附录	模态分析实验指导书	(232)
	实验 1 传递函数的测量	(232)
	实验 2 振动结构的实验模态分析	(234)
	参考文献	(236)

绪 论

一般的振动问题由激励(输入)、振动结构(系统)和响应(输出)三部分组成,如图 1 所示。根据研究目的不同,可将一般振动问题分为以下基本类型。

1. 已知激励和振动结构,求系统响应

这是振动的正问题,称为系统动力响应分析。这是研究得最早最多的一类振动问题。当人们发现仅由静力分析不能满足产品设计要求时,便开始详

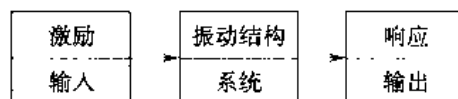


图 1 一般振动问题的组成

细研究基于动力学理论的系统动力响应问题。根据已知的载荷条件,对振动结构进行简化而得到可求解的数学模型,通过一定的数学方法求解出振动结构上关心点的位移、应力、应变等结果,以此为依据对已设计好的振动结构进行考核。不满足动态设计要求时,需修改结构。这一基本分析过程至今仍广泛用于工程问题中,特别是基于线性模型假设的振动理论,已发展至十分成熟的阶段,而许多工程问题应用这一理论能得到相当满意的结果。

求解系统动力响应最成功、最实用的方法莫过于有限元分析法(FEM)。通过对振动结构的离散化并考虑适当的边界条件和连接条件,可以很容易求解各种复杂结构在复杂激励作用下的响应。如果模型合理,能得到比较满意的结果。这为振动理论的实用化创造了最有利的条件。特别是仅根据图纸便可以十分方便地得到振动结构修改后的动态效果。

2. 已知激励和响应,求系统参数

这是振动问题的一类反问题,称为系统识别(辨识)。这一类问题的提出实际是源于第一类基本问题,尽管已知激励和振动结构可求得响应,但许多情况下响应结果并不满足要求,需要修改结构。这时结构修改往往只凭经验,带有很大的盲目性。不仅效果常常不满意,效率也很低,经常反复多次才能达到基本满意的结果。有限元法是进行结构修改的有力工具,然而有限元初始建模往往存在较大误差。鉴于此,人们开始探索根据激励和响应反推振动结构参数的规律和方法。对大多数问题,输入、系统和输出三者有着确定性的关系,只有少数非线性问题,这种确定性关系并不存在。因此,人们以一定假设(如线性、定常、稳定假设)为前提,以一定理论(如线性振动理论)为基础研究得到了系统重构(识别)的多种方法。当然,这些方法的实施需有赖于其他若干种理论和方法。

经常把一个系统(振动结构)模型分成三种:①物理参数模型,即以质量、刚度、阻尼为特征参数的数学模型,这三种参数可完全确定一个振动系统;②模态参数模型,以模态频率、模态矢量(振型)和衰减系数为特征参数的数学模型和以模态质量、模态刚度、模态阻尼、模态矢量(留数)组成的另一类模态参数模型,这两类模态参数都可完整描述一个振动系统;③非参数模型,频响函数或传递函数、脉冲响应函数是两种反映振动系统特性的非参数模型。

根据上述分类方法,系统识别也分为三种:①物理参数识别,以物理参数模型为基础,以物理参数为目标的系统识别方法,称为物理参数识别,这是进行结构动力修改的基础;②模态参数识别,以模态参数模型为基础,以模态参数为目标的系统识别称为模态参数识别,因为模态

参数较物理参数更能从整体上反映系统的动态固有特性,而且参数少得多,所以,进行模态参数识别是进行系统识别的基本要求,也是进行物理参数识别的基础,许多问题实际上只做到模态参数识别即可达到目的,模态参数识别是模态分析的主要任务;③非参数识别,即根据激励和响应确定系统的频响函数(或传递函数)和脉冲响应函数。一般来讲,非参数模型的辨识不是进行系统识别的最终目的,但可通过非参数模型进一步确定模态参数或物理参数。

以上三种系统识别的关系是从已知激励和响应求系统的角度论述的,事实上,三种模型等价。广义地讲,从一种模型可以确定另外两种模型,如从系统的物理参数模型可得到模态参数模型,进而导出非参数模型,这实际是振动理论的基本内容之一,也是进行系统识别的理论基础。

3. 已知系统和响应,求激励

这是另外一种振动反问题。如车、船、飞机的运行,地震、风、波浪引起的建筑物振动等问题,在这些问题中,已知振动结构并较容易测得振动引起的动力响应,但激励却不易确定。为了进一步研究在这些特定激励下原振动结构及新振动结构的动力响应,需要确定这些激励。当然,大多数情况下需用统计特性描述,这样的问题通常称为环境预测或环境模拟。另外一些问题,如旋转机械的振动、爆炸冲击引起的振动等,也难以知道激励情况,需通过结构和响应反推激励。故这类问题也称载荷识别。

至此,尚未对模态分析给出定义。一般地,以振动理论为基础、以模态参数为目标的分析方法,称为模态分析。更确切地说,模态分析是研究系统物理参数模型、模态参数模型和非参数模型的关系,并通过一定手段确定这些系统模型的理论及其应用的一门学科。振动结构模态分析则是指对一般结构所做的模态分析。

按照振动结构非线性程度大小,可将系统简化为线性系统和非线性系统。因而,所进行的系统识别也有线性系统识别和非线性系统识别之分。以往的模态分析均限于线性系统即线性模态分析。近几年来不断有人提出并研究非线性模态分析的问题,但远远未达到线性模态分析的成熟地步。由于线性模态分析在处理非线性系统时存在较大误差,相信基于非线性振动理论的非线性模态分析将会越来越得到重视。

根据研究模态分析的手段和方法不同,模态分析分为理论模态分析和实验模态分析。理论模态分析或称模态分析的理论过程,是指以线性振动理论为基础,研究激励、系统、响应三者的关系,如图 2 所示。

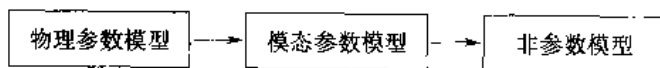


图 2 理论模态分析

实验模态分析(EMA)又称模态分析的实验过程,是理论模态分析的逆过程,如图 3 所示。首先,实验测得激励和响应的时间历程,运用数字信号处理技术求得频响函数(传递函数)或脉冲响应函数,得到系统的非参数模型;其次,运用参数识别方法,求得系统模态参数;最后,如果有必要,进一步确定系统的物理参数。因此,实验模态分析是综合运用线性振动理论、动态测试技术、数字信号处理和参数识别等手段,进行系统识别的过程。本书主要讨论实验模态分析。

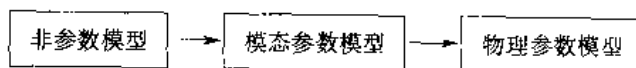


图 3 实验模态分析

计算模态分析实际上是一种理论建模过程,主要是运用有限元法对振动结构进行离散,建立系统特征值问题的数学模型,用各种近似方法求解系统特征值和特征矢量。由于阻尼难以准确处理,因此通常均不考虑小阻尼系统的阻尼,解得的特征值和特征矢量即系统的固有频率和固有振型矢量。

模态参数识别是实验模态分析的核心。模态参数识别已发展有多种成熟的方法,最常用的方法是基于最小二乘法的曲线拟合法。其含义是,根据理论模态分析选择适当的数学模型,使测得的实验模型与数学模型之差最小。

按照不同的非参数模型,模态参数识别分为频域模态参数识别和时域模态参数识别。以频响函数(传递函数)为基础的参数识别称为频域参数识别;以时域信号(脉冲响应函数或自由振动响应)为基础的参数识别称为时域参数识别。频域法已发展得相当成熟、实用。由于时域法所用设备简单,尤其是可只根据自由响应而无需激励就可进行参数识别而受到普遍重视。

在识别除振型外的其他模态参数时,按照使用响应信号的数目分为局部识别和整体识别两种;按照使用激励和响应的数目分为单入单出(SISO)识别法、单入多出(SIMO)识别法和多人多出(MIMO)识别法。SISO属于局部识别,SIMO和MIMO属于整体识别。在SISO频域模态参数识别中,按照模态密集程度不同,可分为单模态识别和多模态识别。前者将待识别的各阶模态看作与其他模态独立的单自由度系统,适于阻尼较小、模态较分散的情形;后者将待识别的几阶模态看作耦合的,并考虑拟合频段以外的模态影响。对于阻尼较大、模态较密集的情况,必须用多模态参数识别法。

在模态分析中,阻尼是一个较难处理的问题。根据结构性质不同,常用到粘性比例阻尼、一般粘性阻尼、结构比例阻尼与结构阻尼四种阻尼模型。在不同阻尼模型下,振动系统模态参数的性质不同。根据模态矢量是实矢量还是复矢量,振动系统分为实模态系统和复模态系统。无阻尼和比例阻尼系统属于实模态系统,而结构阻尼和一般粘性阻尼系统属于复模态系统。因此,对应系统的模态分析有实模态分析和复模态分析两种。

经过半个多世纪的发展,模态分析已经成为振动工程中一个重要的分支。早在20世纪四五十年代,在航空工业中就采用共振实验确定系统的固有频率。60年代,发展了多点单相正弦激振、正弦多频单点激励,通过调力调频分离模态,制造出商用模拟式频响函数分析仪。60年代后期到70年代,出现了各种瞬态和随机激振、频域模态分析识别技术。随着FFT数字式动态测试技术和计算机技术的飞速发展,使得以单入单出及单入多出为基础识别方式的模态分析技术普及到各个工业领域,模态分析得到快速发展日趋成熟,商用数字分析仪及软件大量出现。80年代后期,主要是多人多出随机激振技术和识别技术得到发展。80年代中期至90年代,模态分析在各个工程领域得到普及和深层次应用,在结构性能评价、结构动态修改和动态设计、故障诊断和状态监测以及声控分析等方面的应用研究异常活跃,尤其是基于FEM、EMA和最优控制理论的结构动态修改和动态设计,取得了丰硕的研究成果。目前,模态分析技术在我国已成为一门重要工程技术,而不仅仅是研究单位从事研究的理论课题。

思 考 题

1. 振动的三个基本问题是什么?
2. 描述振动系统有哪几种模型?这几种模型有何关系?
3. 对于振动结构,系统识别有哪几种情形?其关系如何?

4. 什么是模态分析？
5. 模态分析有哪两种分析过程？分别画简图说明。
6. 什么叫模态参数识别？模态分析有哪几种参数识别方法？（分别按不同方法分类）
7. 模态分析中常用的阻尼模型有哪几种？分别属于何种模态分析系统？

第 1 章 模态分析理论基础

1.1 引言

本书讨论的是线性系统,并且假设系统是定常与稳定的,即线性时不变系统。所谓线性是指描述系统振动的微分方程为线性方程,其响应对激励具有叠加性。设系统在激励 $f_1(t)$ 、 $f_2(t)$ 单独作用下的响应是 $x_1(t)$ 、 $x_2(t)$,则系统在 $\alpha_1 f_1(t) + \alpha_2 f_2(t)$ 作用下的响应是 $\alpha_1 x_1(t) + \alpha_2 x_2(t)$,其中 α_1 、 α_2 为常数。所谓定常是指振动系统的动态特性(如质量、阻尼、刚度等)不随时间变化,即具有频率保持性。如系统受到简谐激励 $f(t) = F e^{j\omega t}$ 作用,则系统的稳态响应频率亦为 ω , $x(t) = X e^{j\omega t}$ 。所谓稳定是指系统对有限激励将产生一个有限的响应,即系统满足傅氏变换和拉氏变换的条件。

一个振动系统可以有多种分类方法。从空间角度来分,有离散(有限自由度)系统和连续(无限自由度)系统两种;从时间角度来分,有连续时间系统和离散时间系统两种。所谓连续时间系统,是指激励和响应是连续时间 t 的函数,而离散时间系统是指激励和响应是离散时间点的函数,即对连续(模拟信号)采样后得到的离散信号(数字信号)。本章只讨论空间离散的连续时间系统,后续章节中会涉及空间和时间都离散的系统。

本章研究振动系统的物理参数模型、模态参数模型和非参数模型的关系,即三种模型的理论建模问题。研究方法有坐标变换法与拉氏变换法。坐标变换法只适用于简谐激励的情形,它能给出各种模型及参数的明确物理意义,所以用较多篇幅进行讨论。拉氏变换法非常简明,且适用于一般激励情形,但物理意义不如前者明确。

不管何种方法,总是先建立结构的物理参数模型,即以质量、阻尼、刚度为参数的关于位移的振动微分方程;其次是研究其特征值问题,求得特征对(特征值和特征矢量),进而得到模态参数模型,即系统的模态频率、模态矢量、模态阻尼比、模态质量、模态刚度、模态阻尼等参数。为了研究模态参数模型的物理意义,有时也讨论自由响应。最后,在讨论以上两种模型的基础上,通过研究强迫动力响应问题,可得到系统的非参数模型,即频响函数(或传递函数)和脉冲响应函数。非参数模型是进行实验模态分析系统识别的基础,故对非参数模型的研究显得尤其重要。

根据阻尼模型的不同,分为无阻尼、比例阻尼、结构阻尼和一般粘性阻尼四种情形进行讨论。

1.2 单自由度系统的振动

单自由度系统是最简单的离散振动系统。研究单自由度系统振动的意义是:①由此给出最基本的概念;②单自由度系统的理论在单模态系统识别中可直接应用。

1.2.1 粘性阻尼系统

所谓粘性阻尼是指阻尼力与质点速度成正比且反向(超前速度 180°)的阻尼模型。

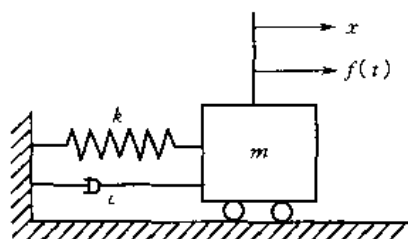


图 1.2-1 单自由度振动系统

图 1.2-1 所示单自由度振动系统的物理参数模型(振动微分方程)为

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = f(t) \quad (1.2-1)$$

式中, m 为质量; c 为粘性阻尼系数; k 为刚度; x 、 \dot{x} 、 \ddot{x} 分别为位移、速度、加速度; t 为时间; $f(t)$ 为激振力。

1. 自由振动

令 $f(t) = 0$, 式(1.2-1)变为

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = 0 \quad (1.2-2)$$

或写成正则形式

$$\ddot{x} + 2\sigma\dot{x} + \omega_0^2 x = 0 \quad (1.2-3)$$

式中, $\sigma = \frac{c}{2m}$ 为衰减系数(衰减指数); $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ 为无阻尼固有频率(固有频率)。

引入阻尼比(无量纲阻尼系数)

$$\zeta = \frac{\sigma}{\omega_0} = \frac{c}{2m\omega_0} = \frac{c}{2\sqrt{mk}}$$

式(1.2-3)进一步可写为

$$\ddot{x} + 2\zeta\omega_0\dot{x} + \omega_0^2 x = 0 \quad (1.2-4)$$

设式(1.2-2)的特解

$$x = \varphi e^{\lambda t} \quad (1.2-5)$$

式中 λ 为系统的特征值。将 x 代入式(1.2-2)得

$$(m\lambda^2 + c\lambda + k)\varphi = 0 \quad (1.2-6)$$

为使系统有非零解, 应有

$$m\lambda^2 + c\lambda + k = 0 \quad (1.2-7)$$

称为系统的特征方程。上述问题称为系统的特征值问题。

式(1.2-7)的解为

$$\lambda_{1,2} = -\sigma \pm j\omega_d \quad (1.2-8)$$

式中 $j = \sqrt{-1}$, $\omega_d = \sqrt{\omega_0^2 - \sigma^2} = \omega_0 \sqrt{1 - \zeta^2}$ 称为阻尼固有频率。

根据阻尼大小不同, 系统的运动分三种情形:

- ① $\zeta > 1$ ($\sigma > \omega_0$), 过阻尼, 系统不产生振动;
- ② $\zeta = 1$ ($\sigma = \omega_0$), 临界阻尼, 无振动发生;
- ③ $\zeta < 1$ ($\sigma < \omega_0$), 欠阻尼, 系统产生振动。

今后讨论的阻尼总是欠阻尼情形。

式(1.2-8)说明系统的特征值实部、虚部分别代表系统的衰减系数和阻尼固有频率, 特征值的模 $|\lambda_{1,2}| = \omega_0$, 所以在振动理论中, 有时也把特征值称为复频率。

容易求得方程(1.2-2)的通解即自由振动响应

$$x = A e^{-\sigma t} \sin(\omega_d t + \theta) \quad (1.2-9)$$

式中 A 、 θ 为由初始条件确定的常数。如果初始条件 $t=0$ 时, $x=x_0$, $\dot{x}=\dot{x}_0$, 则

$$\left. \begin{aligned} A &= \sqrt{x_0^2 + \left(\frac{\dot{x}_0 + \sigma x_0}{\omega_d} \right)^2} \\ \theta &= \arctan \frac{x_0 \omega_d}{\dot{x}_0 + \sigma x_0} \end{aligned} \right\} \quad (1.2-10)$$

2. 频响函数

设系统作用简谐激励

$$f(t) = F e^{j\omega t} \quad (1.2-11)$$

式中, F 为激励幅值; ω 为激励频率。此时, 稳态位移响应

$$x = X e^{j\omega t} \quad (1.2-12)$$

式中, X 为稳态位移响应幅值; ω 为稳态响应频率。

将以上二式代入式(1.2-1), 得

$$(k - m\omega^2 + j\omega c) X = F \quad (1.2-13)$$

在简谐激励下, 定义系统位移频响函数为稳态位移响应与激励幅值之比, 即

$$H(\omega) = \frac{X}{F} = \frac{1}{k - m\omega^2 + j\omega c} \quad (1.2-14)$$

则

$$X = H(\omega) F \quad (1.2-15)$$

除位移频响函数外, 尚有速度频响函数 $H_V(\omega)$ 、加速度频响函数 $H_A(\omega)$, 即

$$H_V(\omega) = \frac{V}{F} = \frac{j\omega X}{F} = j\omega H(\omega) = \frac{j\omega}{k - m\omega^2 + j\omega c} \quad (1.2-16)$$

$$H_A(\omega) = \frac{A}{F} = \frac{j\omega V}{F} = j\omega H_V(\omega) = -\omega^2 H(\omega) = -\frac{\omega^2}{k - m\omega^2 + j\omega c} \quad (1.2-17)$$

位移频响函数、速度频响函数和加速度频响函数统称为频响函数。因位移频响函数应用最多, 故通常提到的频响函数即指位移频响函数。

从频响函数的表达式可知, 频响函数与 m 、 k 、 c 有关。它是反映系统固有特性的量, 是以外激励频率 ω 为参变量的非参数模型。

若系统受任意激励作用, 频响函数可定义为系统的稳态响应与激励的傅氏变换之比, 即

$$H(\omega) = \frac{X(\omega)}{F(\omega)}$$

$$X(\omega) = H(\omega) F(\omega)$$

频响函数的倒数称为阻抗。分析问题时, 有时使用阻抗更加方便。三种阻抗定义如下

$$\left. \begin{aligned} \text{位移阻抗} \quad Z(\omega) &= \frac{1}{H(\omega)} = k - m\omega^2 + j\omega c \\ \text{速度阻抗} \quad Z_V(\omega) &= \frac{1}{H_V(\omega)} = \frac{k - m\omega^2 + j\omega c}{j\omega} \\ \text{加速度阻抗} \quad Z_A(\omega) &= \frac{1}{H_A(\omega)} = -\frac{k - m\omega^2 + j\omega c}{\omega^2} \end{aligned} \right\} \quad (1.2-18)$$

三种频响函数与三种阻抗的定义及惯用名见表 1.2-1。

表 1.2-1 各种频响应函数与阻抗的定义及惯用名

名称	位移频响应函数 (位移导纳、动柔度)	速度频响应函数 (速度导纳、导纳)	加速度频响应函数 (加速度导纳、惯性)	位移阻抗 (动刚度)	速度阻抗 (机械阻抗)	加速度阻抗 (表观质量)
定义	$H(\omega) = \frac{X}{F}$	$H_V(\omega) = \frac{V}{F}$	$H_A(\omega) = \frac{A}{F}$	$Z(\omega) = \frac{F}{X}$	$Z_V(\omega) = \frac{F}{V}$	$Z_A(\omega) = \frac{F}{A}$

3. 脉冲响应函数

振动系统在单位脉冲力作用下的自由响应称为单位脉冲响应函数,简称脉冲响应函数。

所谓单位脉冲力,是指冲量为 1、作用时间无限短的瞬时力。显然,用 δ 函数描述单位脉冲力为

$$\delta(t) = \begin{cases} \infty & t=0 \\ 0 & t \neq 0 \end{cases} \quad (1.2-19)$$

且

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = 1 \quad (1.2-20)$$

对单自由度系统,质点受到单位脉冲力后获得的动量 $m\dot{x}_0 = 1$,则自由振动的初始条件($t=0$)为

$$x_0 = 0, \dot{x}_0 = \frac{1}{m} \quad (1.2-21)$$

代入式(1.2-10),由式(1.2-9),系统的自由振动响应即脉冲响应函数

$$h(t) = \frac{1}{m\omega_d} e^{-\sigma t} \sin \omega_d t \quad (1.2-22)$$

易证脉冲响应函数与频响应函数是一傅氏变换对。设单自由度系统作用单位脉冲力为 $\delta(t)$,其响应即单位脉冲响应函数 $h(t)$ 。对它们分别作傅氏变换

$$F(\omega) = \mathcal{F}[\delta(t)] = 1 (\delta \text{ 函数的性质})$$

$$X(\omega) = \mathcal{F}[h(t)]$$

由频响应函数定义,有

$$H(\omega) = \frac{X(\omega)}{F(\omega)} = X(\omega) = \mathcal{F}[h(t)]$$

即 $H(\omega)$ 与 $h(t)$ 为一傅氏变换对。

可见,脉冲响应函数与频响应函数一样是反映振动系统动态特性的量,只不过频响应函数在频域内描述系统固有特性,而脉冲响应函数在时域内描述系统固有特性。因此,频响应函数与脉冲响应函数都构成了系统的非参数模型,它们是进行系统识别的基础。

顺便指出,由式(1.2-9)、(1.2-22)看出,系统的自由响应与脉冲响应函数只差一常数因子,故自由响应也可以作为非参数模型进行系统识别。

1.2.2 结构阻尼系统

1. 结构阻尼模型

研究表明,许多振动结构的阻尼并不适于用粘性阻尼描述,因为这类结构的阻尼主要来源于材料内阻和部件结合面之间的干摩擦。为此,引入结构阻尼模型。结构阻尼又称迟滞阻尼

或固体阻尼。

实验指出,在简谐激励作用下,大多数金属结构(如钢和铝)内部阻尼每一循环消耗的能量在一广泛频率范围内与频率无关,而与振幅的平方成正比,即

$$\Delta E = \alpha X^2 \quad (1.2-23)$$

其中 α 是与结构有关的常量。

结构阻尼是一种非粘性阻尼。对非粘性阻尼,通常引入两个无量纲量表示阻尼大小

$$\text{阻尼比容} \quad r = \frac{\Delta E}{U} \quad (1.2-24)$$

$$\text{损耗因子} \quad \eta = \frac{\Delta E}{2\pi U} \quad (1.2-25)$$

其中 U 是振动系统一个周期内的最大势能,即

$$U = \frac{1}{2} k X^2 \quad (1.2-26)$$

k 为等效弹性系数。

为了确定非粘性阻尼力,常从能量等效原则出发求得等效粘性阻尼系数 c_e ,即认为非粘性阻尼力在一个振动周期内消耗的能量 ΔE 与等效粘性阻尼力在一个周期内消耗的能量 ΔW 相等。设单自由度系统响应 $x = X \sin \omega t$, 则

$$\Delta W = \oint c_e \dot{x} dx = \int_0^{2\pi} c_e \dot{x}^2 dt = \int_0^{2\pi} c_e X^2 \omega^2 \cos^2 \omega t dt = \pi c_e \omega X^2$$

令 $\Delta W = \Delta E$, 则 $\pi c_e \omega X^2 = \Delta E$, 等效粘性阻尼系数

$$c_e = \frac{\Delta E}{\pi \omega X^2} \quad (1.2-27)$$

由式(1.2-24)~式(1.2-26),可得用阻尼比容 r 和损耗因子 η 表示的等效粘性阻尼系数

$$c_e = \frac{rk}{2\pi\omega} = \frac{g}{\omega} \quad (1.2-28)$$

$$c_e = \frac{\eta k}{\omega} \quad (1.2-29)$$

其中, $g = \frac{rk}{2\pi} = \eta k$ 称为结构阻尼系数,具有刚度量纲; η 常称为结构阻尼比。

对于结构阻尼,将式(1.2-23)代入式(1.2-24)、式(1.2-25),考虑式(1.2-26)得阻尼比容和损耗因子

$$r = \frac{2\alpha}{k}, \quad \eta = \frac{\alpha}{\pi k} \quad (1.2-30)$$

由式(1.2-27)~式(1.2-29)中任一式得结构阻尼的等效粘性阻尼系数

$$c_e = \frac{\alpha}{\pi\omega} \quad (1.2-31)$$

结构阻尼力

$$R = -c_e \dot{x} = -\frac{\alpha}{\pi\omega} \dot{x} \quad (1.2-32)$$

事实上,经常用结构阻尼系数 g 、结构阻尼比(损耗因子) η 直接表示结构阻尼力的大小,则结构阻尼力

$$R = -\frac{g}{\omega}\dot{x} = -\frac{\eta k}{\omega}\dot{x} \quad (1.2-33)$$

由于 $x = X e^{j\omega t}$, $\dot{x} = j\omega X e^{j\omega t} = j\omega x$, 所以

$$R = -jgx = -j\eta kx \quad (1.2-34)$$

可见, 结构阻尼力是大小与位移成正比、方向与速度相反的一种阻尼力。这就是结构阻尼力的物理意义。

2. 振动微分方程和复刚度

根据图 1.2-1 所示单自由度系统的物理模型, 考虑结构阻尼力式(1.2-34), 易得具有结构阻尼单自由度系统的振动微分方程

$$m\ddot{x} + (k + jg)x = f(t) \quad (1.2-35)$$

或

$$m\ddot{x} + (1 + j\eta)kx = f(t) \quad (1.2-36)$$

式中将结构阻尼力与弹性力合并为一项, 称 $k + jg = (1 + j\eta)k$ 为复刚度。

3. 特征值问题

通常不讨论结构阻尼振动系统的自由响应。事实上, 上述结构阻尼模型是建立在稳态简谐激励、稳态简谐响应基础上的, 故由式(1.2-35)或(1.2-36)求自由响应将无意义。而从数学角度讲, 可以分析式(1.2-35)或式(1.2-36)对应的特征值问题。

令 $f(t) = 0$, 式(1.2-36)成为

$$m\ddot{x} + (1 + j\eta)kx = 0 \quad (1.2-37)$$

设其特解为

$$x = \psi e^{\lambda t} \quad (1.2-38)$$

代入式(1.2-37), 得特征方程

$$m\lambda^2 + (1 + j\eta)k = 0 \quad (1.2-39)$$

解得特征值

$$\lambda_{1,2} = \mp \nu \pm j\omega_g \quad (1.2-40)$$

其中

$$\left. \begin{aligned} \nu &= \frac{\sqrt{2}}{2} \omega_0 \sqrt{\sqrt{1 + \eta^2} - 1} \\ \omega_g &= \frac{\sqrt{2}}{2} \omega_0 \sqrt{\sqrt{1 + \eta^2} + 1} \end{aligned} \right\} \quad (1.2-41)$$

ν 称为结构阻尼系统的衰减系数, ω_g 称为结构阻尼系统的特征频率。

4. 频响函数

设作用在结构阻尼系统上的简谐激励 $f(t) = F e^{j\omega t}$, 稳态简谐响应 $x = X e^{j\omega t}$, 代入式(1.2-36), 得

$$X = H(\omega) F \quad (1.2-42)$$

式中单自由度结构阻尼系统的频响函数

$$H(\omega) = \frac{1}{k - m\omega^2 + j\eta k} \quad (1.2-43)$$

5. 结构阻尼与粘性阻尼的换算关系

结构阻尼系统的衰减系数

$$v = \frac{\sqrt{2}}{2} \omega_0 \sqrt{\sqrt{1+\eta^2} - 1}$$

在小阻尼情况下, $\eta \ll 1, \sqrt{1+\eta^2} \approx 1 + \frac{1}{2}\eta^2$, 则

$$v \approx \frac{1}{2} \eta \omega_0 \quad (1.2-44)$$

其对应等效粘性阻尼系统的衰减系数

$$\sigma = \zeta \omega_0 \quad (1.2-45)$$

比较式(1.2-44)、式(1.2-45), 有

$$\eta \approx 2\zeta \quad (1.2-46)$$

可见, 在小阻尼情况下, 结构阻尼比 η 近似等于两倍的粘性阻尼比 ζ 。

1.3 单自由度系统频响函数的各种表达形式及其特征

为深入理解频响函数的物理意义, 本节进一步讨论频响函数的各种表达形式及其数字与图形特征, 它是进行单模态参数识别的理论基础。由于结构阻尼系统位移频响函数的特征较有规律, 故先介绍结构阻尼系统, 再介绍粘性阻尼系统。

1.3.1 结构阻尼系统

(1) 频响函数的基本表达式

式(1.2-43)即基本表达式, 可进一步写成

$$H(\omega) = \frac{1}{k - m\omega^2 + j\eta k} = \frac{1}{m} \cdot \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2 + j\eta\omega_0^2} = \frac{1}{k} \cdot \frac{1}{1 - \Omega^2 + j\eta} \quad (1.3-1)$$

其中 $\Omega = \frac{\omega}{\omega_0}$ 称为频率比, 即无量纲频率。

(2) 频响函数的极坐标表达式(复指数形式)

此表达式为

$$H(\omega) = |H(\omega)| e^{j\varphi} \quad (1.3-2)$$

其中

$$|H(\omega)| = \frac{1}{k} \cdot \frac{1}{\sqrt{(1 - \Omega^2)^2 + \eta^2}} \quad (1.3-3)$$

$$\varphi = \arctan\left(\frac{-\eta}{1 - \Omega^2}\right) \quad (1.3-4)$$

分别称为频响函数的幅频特性和相频特性。

(3) 频响函数的直角坐标表达式(复数形式)

此表达式为

$$H(\omega) = H^R(\omega) + jH^I(\omega) \quad (1.3-5)$$

其中

$$H^R(\omega) = \frac{1}{k} \cdot \frac{1 - \Omega^2}{(1 - \Omega^2)^2 + \eta^2} \quad (1.3-6)$$

$$H^I(\omega) = \frac{1}{k} \cdot \frac{-\eta}{(1-\Omega^2)^2 + \eta^2} \quad (1.3-7)$$

分别称为频响函数的实频特性和虚频特性。

(4) 频响函数的矢量表达式

此表达式为

$$\mathbf{H}(\omega) = H^R(\omega)\mathbf{i} + H^I(\omega)\mathbf{j} \quad (1.3-8)$$

式中, \mathbf{i} 、 \mathbf{j} 为单位矢量; $H^R(\omega)$ 、 $H^I(\omega)$ 如式(1.3-6)、式(1.3-7)所示。

单自由度结构阻尼系统频响函数各种表达式图形及数字特征见表 1.3-1。

1.3.2 粘性阻尼系统

(1) 频响函数的基本表达式

式(1.2-14)即基本表达式, 可进一步写成

$$H(\omega) = \frac{1}{k - m\omega^2 + j\omega c} = \frac{1}{m} \cdot \frac{1}{\frac{\omega_0^2}{\omega^2} - \omega^2 + j2\zeta\omega} = \frac{1}{k} \cdot \frac{1}{1 - \Omega^2 + j2\zeta\Omega} \quad (1.3-9)$$

(2) 频响函数的极坐标表达式(复指数形式)

此表达式为

$$H(\omega) = |H(\omega)|e^{j\varphi} \quad (1.3-10)$$

其中

$$|H(\omega)| = \frac{1}{k} \cdot \frac{1}{\sqrt{(1-\Omega^2)^2 + 4\zeta^2\Omega^2}} \quad (1.3-11)$$

$$\varphi = \arctan\left(\frac{-2\zeta\Omega}{1-\Omega^2}\right) \quad (1.3-12)$$

分别为粘性阻尼系统频响函数的幅频特性和相频特性。

(3) 频响函数的直角坐标表达式(复数形式)

此表达式为

$$H(\omega) = H^R(\omega) + jH^I(\omega) \quad (1.3-13)$$

其中

$$H^R(\omega) = \frac{1}{k} \cdot \frac{1-\Omega^2}{(1-\Omega^2)^2 + 4\zeta^2\Omega^2} \quad (1.3-14)$$

$$H^I(\omega) = \frac{1}{k} \cdot \frac{-2\zeta\Omega}{(1-\Omega^2)^2 + 4\zeta^2\Omega^2} \quad (1.3-15)$$

分别为粘性阻尼系统频响函数的实频特性和虚频特性。

(4) 频响函数的矢量表达式

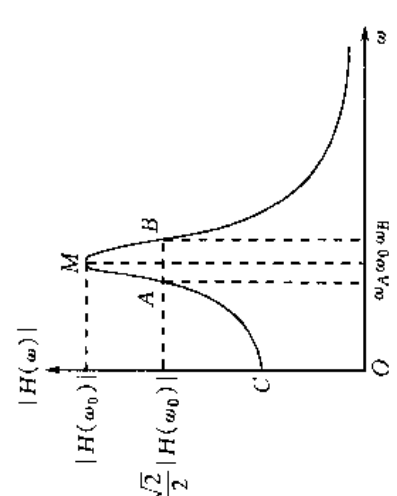
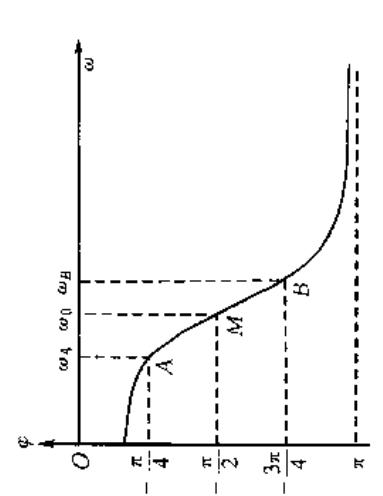
此表达式为

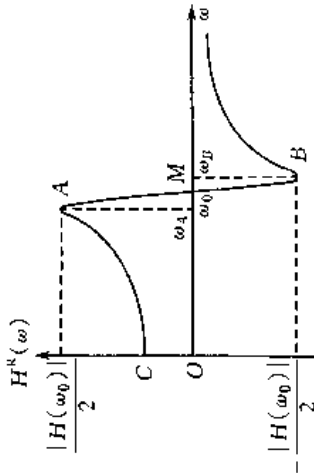
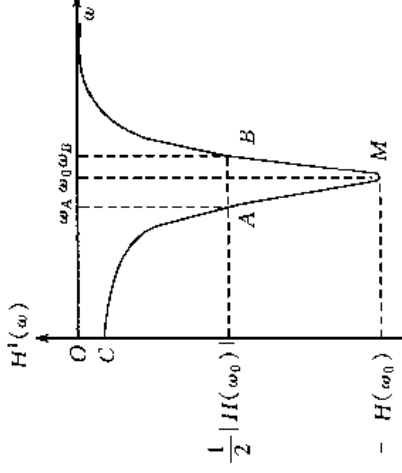
$$\mathbf{H}(\omega) = H^R(\omega)\mathbf{i} + H^I(\omega)\mathbf{j} \quad (1.3-16)$$

式中 $H^R(\omega)$ 、 $H^I(\omega)$ 如式(1.3-14)、式(1.3-15)所示。

图 1.3-1 给出粘性阻尼系统位移频响函数各种特性曲线。由此可见, 粘性阻尼系统位移频响函数各种曲线不像结构阻尼系统那样具有较简单的特征。粘性阻尼系统具有三种不相等的谐振频率, 即位移谐振频率 ω_D 、阻尼谐振频率 ω_d 和无阻尼谐振频率 ω_0 , 它们出现在各种曲线的不同特征点上。这三种谐振频率具有如下关系

表 1.3-1 单自由度结构阻尼系统频响函数各种表达式图形及数字特征

特性曲线	图形特征	模态参数	备注
幅频特性	 <p>(1) 极值点 $M: \Omega: 1(\omega = \omega_0)$ - 幅值, 位移谐振点, 对应位移最大响应幅值, $H(\omega_0) = \frac{1}{k\eta}$</p> <p>(2) 半功率点 A, B: 幅频特性曲线上最大值下降至其 $\frac{\sqrt{2}}{2}$ 倍处的两个点, 半功率点处能量为最大能量的一半, $H(\omega_A) = H(\omega_B) = \frac{\sqrt{2}}{2} H(\omega_0)$</p>	<p>(1) 固有频率: 由极值点 M 确定, $\omega_0 = \omega_D$</p> <p>(2) 阻尼比: 由半功率带宽确定, $\eta = \frac{\omega_B - \omega_A}{\omega_0} = \frac{\Delta\omega}{\omega_0}$</p>	<p>半功率带宽: $\Delta\omega = \omega_B - \omega_A$</p> <p>相对半功率带宽: $\Delta\Omega = \Omega_B - \Omega_A$</p> <p>半功率带宽反映了阻尼大小</p>
相频特性	 <p>(1) 拐点 $M: \Omega: 1(\omega = \omega_D = \omega_0)$, 位移谐振点, 对应相位角 $\varphi = -\frac{\pi}{2}$</p> <p>(2) 半功率点 $A, B: \varphi_A = -\frac{3\pi}{4}, \varphi_B = -\frac{\pi}{4}$</p>	<p>(1) 固有频率: 由拐点 M 确定</p> <p>(2) 阻尼比: 由半功率带宽确定, $\eta = \frac{\frac{d\varphi}{d\Omega} \Big _{\Omega=1}}{\frac{2}{\omega_0} \frac{\Delta\varphi}{\Delta\Omega} \Big _{\Omega=1}} = \frac{\frac{d\varphi}{d\Omega} \Big _{\Omega=1}}{\frac{2}{\omega_0} \frac{\Delta\varphi}{\Delta\Omega} \Big _{\Omega=1}}$</p>	<p>相频曲线上拐点斜率也反映了阻尼大小</p>

特性曲线	图形特征	模态参数	备注
实频特性 	<p>(1) 一个零点 $M: \Omega = 1(\omega = \omega_0)$ 对应位移谐振点</p> <p>(2) 半功率点: 实频曲线上正负极值点 A, B 对应两个半功率点, 易知正负极值绝对值相等, 且为幅频曲线极值的 $1/2$ 半 $H^R(\omega_A) = -H^R(\omega_B) = \frac{1}{2k\eta} \frac{1}{1 - H(\omega_0)}$</p>	<p>(1) 固有频率: 由零点 M 确定</p> <p>(2) 阻尼比: 由半功率带宽确定 $\eta = \frac{\omega_B - \omega_A}{\omega_0} = \frac{\Delta\omega}{\omega_0}$</p>	正负极值点水平距离反映了阻尼大小
虚频特性 	<p>(1) 负极值点 $M: \Omega = 1(\omega = \omega_0 - \omega_n)$, 位移谐振点, 对应最大位移响应 $H^I(\omega_0) = -\frac{1}{k\eta}$, 其绝对值与幅频曲线极大值 $H(\omega_0)$ 相等</p> <p>(2) 半功率点: 虚频曲线上二分之一峰值处两点 A, B 对应半功率点, $H^I(\omega_A) = H^I(\omega_B) = \frac{1}{2} H^I(\omega_0) = \frac{1}{2k\eta}$</p>	<p>(1) 固有频率: 由极值点确定</p> <p>(2) 阻尼比: 由半功率带宽确定 $\eta = \frac{\omega_B - \omega_A}{\omega_0} = \frac{\Delta\omega}{\omega_0}$</p>	<p>比较虚频曲线与幅频曲线, 二者曲线形状相同, 不过 $-$ 为负峰 $-$ 为正峰, 但虚频曲线半功率带宽内的点较幅频曲线多, 故用虚频曲线作参数识别较幅频曲线要好</p>

特性曲线	图形特征	模态参数	备注
	<p>(1) 曲线为圆, 半径为 $\frac{1}{2k\eta}$</p> <p>(2) 起点 $C: \Omega - 0 (\omega = 0)$, 坐标 $\left(\frac{1}{k(1+\eta^2)}, \frac{-\eta}{k(1+\eta^2)} \right)$</p> <p>(3) 共振点 $M: \Omega - 1 (\omega = \omega_0)$, 即位移谐振点, 矢量 $H(\omega)$ 幅角变化率 $\frac{d\varphi}{d\omega}$ 或矢端弧长变化率 $\frac{ds}{d\omega}$ 具有极大值</p> <p>(4) 半功率点 A, B: 对应圆水平直径的两端点</p> <p>(5) 终点 $O: \Omega = \infty (\omega = \infty)$, 对应坐标原点 $O(0,0)$</p>	<p>(1) 固有频率: 由 M 确定, ω_0</p> <p>(2) 阻尼比: 由半功率带宽度确定, 或由共振点 M 附近两点 $1, 2$ 确定,</p> $\eta = \frac{\omega_2^2 - \omega_1^2}{\omega_0^2}, \frac{1}{\eta} = \frac{\frac{\omega_1}{2} + \eta \frac{\omega_2}{2}}{\frac{\omega_1}{2} + \eta \frac{\omega_2}{2}}$ <p>或</p> $\eta \approx \frac{\omega_2 - \omega_1}{\omega_0}, \frac{1}{\eta} \approx \frac{\frac{\omega_1}{2} + \eta \frac{\omega_2}{2}}{\frac{\omega_1}{2} + \eta \frac{\omega_2}{2}}$	<p>(1) 由实频特性式(1.3-6)、虚频特性式(1.3-7)消去 Ω, 得 $H(\omega)$ 矢量端点的轨迹方程:</p> $[H^R(\omega)]^2 + \left[H^I(\omega) + \frac{1}{2k\eta} \right]^2 - \left(\frac{1}{2k\eta} \right)^2 = 0$ <p>(2) 不管阻尼多大, 半功率点总位于 Nyquist 图水平直径的端部, 半功率点之间的曲线包围相当大, 共振区在 Nyquist 图上最易反映出来, 故用 Nyquist 图作参数识别较好</p>
	<p>(1) 共振点 $M: \Omega - 1 (\omega = \omega_0)$, 对应 ω_0, 位移谐振点, 峰值 $\lg \frac{1}{k\eta}$</p> <p>(2) 刚度线: Bode 图上低频段近似为一条水平直线。低频段响应主要决定于系统刚度, 故称为刚度线</p> <p>(3) 质量线: Bode 图上高频段近似为一条斜率为 -2 的直线。高频段响应主要决定于系统质量, 故称为质量线</p> <p>(4) 刚度线和质量线又称为基架线, 其交点 M_1 对应位移谐振频率 $\omega - \omega_0$</p>	固有频率: 由峰值点 M 确定	<p>Bode 图不仅能在很宽频段内反映系统的幅频特性, 而且能将低频段和高频段内幅频曲线用最突出的特征反映出来</p>

$$\omega_n < \omega_d < \omega_0$$

在小阻尼时,它们近似相等。另外,粘性阻尼系统的 Nyquist 图也不再是圆,而是一个近似桃形的图形。不过,在小阻尼情形下,使用 Nyquist 图作参数识别时仍可将其视为圆处理。

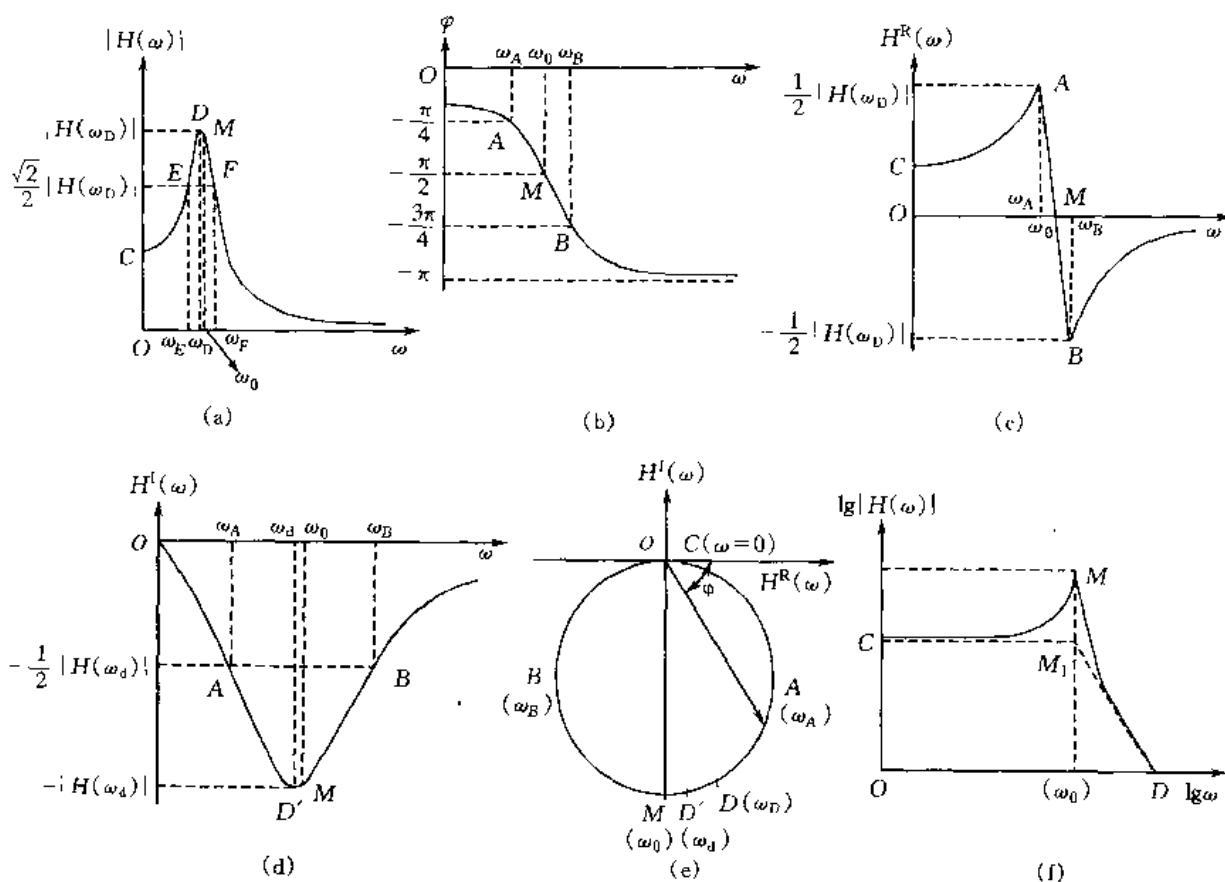


图 1.3-1 粘性阻尼系统位移频响应函数特征曲线

(a)幅频曲线;(b)相频曲线;(c)实频曲线;(d)虚频曲线;
(e)Nyquist 图(导纳圆);(f)Bode 图(对数幅频曲线)

鉴于上述原因,对粘性阻尼系统也常利用速度频响应函数进行系统参数识别。下面简单介绍其各种表达式及特征。

①基本形式:

$$H_V(\omega) = \frac{j\omega}{k - m\omega^2 + j\omega c} = \frac{\omega_0}{k} \cdot \frac{\Omega}{-j(1 - \Omega^2) + 2\zeta\Omega} \quad (1.3-17)$$

②极坐标形式:

$$H_V(\omega) = |H_V(\omega)| e^{j\varphi_V} \quad (1.3-18)$$

式中

$$\text{幅频特性} \quad |H_V(\omega)| = \frac{\omega_0}{k} \cdot \frac{\Omega}{\sqrt{(1 - \Omega^2)^2 + 4\zeta^2\Omega^2}} \quad (1.3-19)$$

$$\text{相频特性} \quad \varphi_V = \arctan \frac{1 - \Omega^2}{2\zeta\Omega} \quad (1.3-20)$$

③直角坐标形式:

$$H_V(\omega) = H_V^R(\omega) + jH_V^I(\omega) \quad (1.3-21)$$

式中

$$\text{实频特性} \quad H_V^R(\omega) = \frac{\omega_0}{k} \cdot \frac{2\zeta\Omega^2}{(1-\Omega^2)^2 + 4\zeta^2\Omega^2} \quad (1.3-22)$$

$$\text{虚频特性} \quad H_V^I(\omega) = \frac{\omega_0}{k} \cdot \frac{\Omega(1-\Omega^2)}{(1-\Omega^2)^2 + 4\zeta^2\Omega^2} \quad (1.3-23)$$

④矢量形式:

$$\mathbf{H}_V(\omega) = H_V^R(\omega)\mathbf{i} + H_V^I(\omega)\mathbf{j} \quad (1.3-24)$$

各种曲线如图 1.3-2 所示。

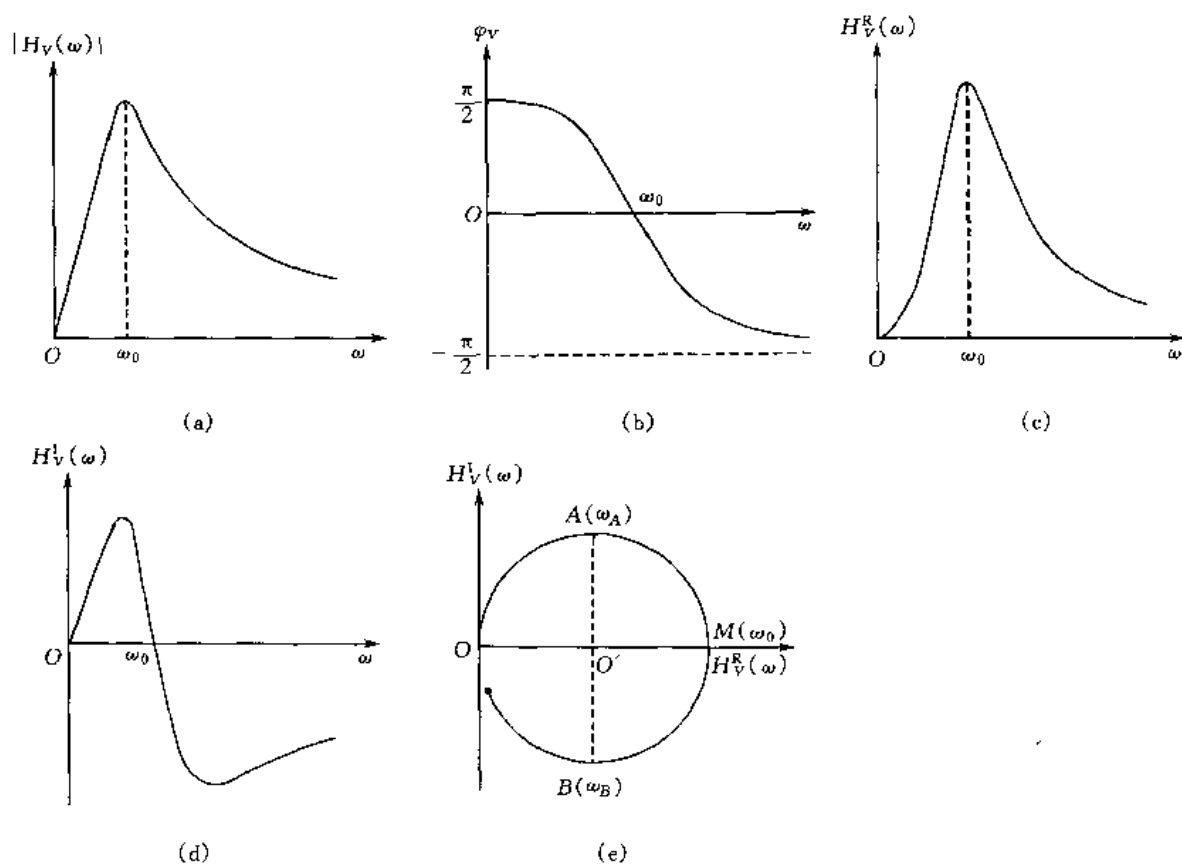


图 1.3-2 粘性阻尼系统速度频响应函数特征曲线

(a)幅频曲线;(b)相频曲线;(c)实频曲线;(d)虚频曲线;(e)Nyquist 图(导纳圆)

可见,粘性阻尼系统速度频响应函数的各种曲线与结构阻尼系统位移频响应函数的曲线一样,都具有明显而简单的特征。

1.4 多自由度系统的实模态分析

绝大多数振动结构可离散成为有限个自由度的多自由度系统。多自由度系统与单自由度系统有本质的区别。对一个有 n 个自由度的振动系统,需用 n 个独立的物理坐标描述其物理参数模型。在线性范围内,物理坐标系中的自由振动响应为 n 个主振动的线性叠加,每个主

振动都是-一种特定形态的自由振动(简谐振动或衰减振动),振动频率即系统的主频率(固有频率或阻尼固有频率),振动形态即系统的主振型(模态或固有振型),对应每个阻尼系统的主振动有相应的模态阻尼。一般地, n 个自由度系统有 n 个主频率和 n 个主振型以及 n 个模态阻尼。多自由度系统具有多个主振型是区别于单自由度系统的最本质之处。此外,还需讨论多自由度系统的频响函数和脉冲响应函数,即系统的非参数模型。本节和下节仍假设系统受简谐激励,用坐标变换法研究模态参数模型和非参数模型。

坐标变换法的基础是求解系统特征值问题。在系统强迫振动微分方程中令激励为零,得齐次方程。设特解 $\mathbf{x} = \boldsymbol{\varphi} e^{i\omega t}$,代入齐次方程,归结为数学上的一个特征值问题。这一特征值问题与一个特定的振动系统相联系,反映了系统的固有特性。特征值与模态频率和模态阻尼相联系(不一定就是模态频率),特征矢量与模态矢量相联系(不一定就是模态矢量)。所有独立的特征矢量构成一矢量空间的完备正交基,这一矢量空间称为模态空间。特征矢量具有特定的加权正交性,以其按列组合构成的特征矢量矩阵为变换矩阵,可将物理空间和模态空间相联系。在模态坐标系中可将系统的振动方程解耦,进而求得物理坐标中的响应,频响函数和脉冲响应函数也随之而得。

对无阻尼和比例阻尼系统,表示系统主振型的模态矢量是实数矢量,故称实模态系统,相应的模态分析过程称为实模态分析。本节首先研究实模态分析的基本理论。

1.4.1 无阻尼系统

无阻尼系统又称保守系统。具有 n 个自由度的无阻尼振动系统的振动微分方程为

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}} + \mathbf{K}\mathbf{x} = \mathbf{f}(t) \quad (1.4-1)$$

式中 \mathbf{x} 、 $\ddot{\mathbf{x}}$ 分别是用物理坐标描述的位移列阵和加速度列阵, n 阶; $\mathbf{f}(t)$ 是外部激励列阵, n 阶; \mathbf{M} 、 \mathbf{K} 分别是系统的质量矩阵和刚度矩阵, $n \times n$ 阶,均是实对称矩阵。

\mathbf{M} 是正定矩阵, \mathbf{K} 是正定或半正定矩阵。事实上,对任何非零 \mathbf{x} 和 $\dot{\mathbf{x}}$,系统的动能 T 和势能 U 为

$$T = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{x}}^T \mathbf{M} \dot{\mathbf{x}} > 0$$

$$U = \frac{1}{2} \mathbf{x}^T \mathbf{K} \mathbf{x} \geq 0$$

若 \mathbf{K} 是正定矩阵, $U > 0$,系统没有刚体位移,称为正定振动系统;若 \mathbf{K} 是半正定矩阵, $U \geq 0$,系统将出现刚体位移,称为半正定系统。一个振动系统是正定或半正定,与结构边界条件有关。

1. 自由振动

令 $\mathbf{f}(t) = \mathbf{0}$,则式(1.4-1)成为

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}} + \mathbf{K}\mathbf{x} = \mathbf{0} \quad (1.4-2)$$

(1)特征值问题

设特解

$$\mathbf{x} = \boldsymbol{\varphi} e^{i\omega t} \quad (1.4-3)$$

式中 $\boldsymbol{\varphi}$ 是自由响应的幅值列阵, n 阶。将上式代入式(1.4-2),得

$$(\mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M}) \boldsymbol{\varphi} = \mathbf{0} \quad (1.4-4)$$

当 φ 为非零时,这是一个广义特征值问题, ω^2 为特征值, φ 为特征矢量。上式也是以 φ 中元素为变量的 n 阶代数齐次方程组, $(\mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M})$ 为其系数矩阵。该方程有非零解的充要条件是其系数矩阵行列式为零,即

$$|\mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M}| = 0 \quad (1.4-5)$$

称为特征值问题式(1.4-4)的特征方程,它是关于 ω^2 的 n 次代数方程。设无重根,解此方程得 ω 的 n 个互异正根 ω_{0i} ($i=1,2,\dots,n$),通常按升序排列。则

$$0 < \omega_{01} < \omega_{02} < \dots < \omega_{0n}$$

ω_{0i} 为振动系统的第 i 阶主频率(模态频率),此时对应无阻尼振动系统,主频率即固有频率。

将每一个 ω_{0i} ($i=1,2,\dots,n$)代入式(1.4-4),得到关于 φ_i 中元素的具有 $n-1$ 个独立方程的代数方程组。共解得 n 个线性无关的非零矢量 φ_i 的比例解,通常选择一定方法进行归一化,称为主振型(模态振型、模态矢量或模态),因对应无阻尼振动系统,故为固有振型。此时为实矢量

$$\varphi_i = [\varphi_{1i} \quad \varphi_{2i} \quad \dots \quad \varphi_{ni}]^T \quad (i=1,2,\dots,n) \quad (1.4-6)$$

特征值与特征矢量称为系统的特征对。将 n 个特征矢量 φ_i 按列排成一个 $n \times n$ 阶矩阵

$$\Phi = [\varphi_1 \quad \varphi_2 \quad \dots \quad \varphi_n] \quad (1.4-7)$$

称为系统的特征矢量矩阵,此时特征矢量即为模态矢量,故又称为模态矩阵。

(2)特征矢量的正交性

任一特征对均满足式(1.4-4)。将 ω_{0i}^2 、 φ_i 代入式(1.4-4)并左乘 φ_k^T ,得

$$\varphi_k^T (\mathbf{K} - \omega_{0i}^2 \mathbf{M}) \varphi_i = 0 \quad (a)$$

再将 ω_{0k}^2 、 φ_k 代入式(1.4-4),转置后右乘 φ_i ,注意 $\mathbf{K}^T = \mathbf{K}$ 、 $\mathbf{M}^T = \mathbf{M}$,得

$$\varphi_k^T (\mathbf{K} - \omega_{0k}^2 \mathbf{M}) \varphi_i = 0 \quad (b)$$

式(a)-(b),得

$$(\omega_{0k}^2 - \omega_{0i}^2) \varphi_k^T \mathbf{M} \varphi_i = 0$$

系统无重根, $i \neq k$ 时, $\omega_{0k}^2 - \omega_{0i}^2 \neq 0$, 则

$$\varphi_k^T \mathbf{M} \varphi_i = 0 \quad (i \neq k) \quad (c)$$

当 $i = k$ 时,定义模态质量(主质量)

$$m_i = \varphi_i^T \mathbf{M} \varphi_i \quad (d)$$

\mathbf{M} 正定,故 $m_i > 0$ 。

将式(c)代入式(a),得

$$\varphi_k^T \mathbf{K} \varphi_i = 0 \quad (i \neq k) \quad (e)$$

当 $i = k$ 时,定义模态刚度(主刚度)

$$k_i = \varphi_i^T \mathbf{K} \varphi_i \quad (f)$$

\mathbf{K} 正定或半正定,故 $k_i \geq 0$ 。

式(d)、(f)代入式(a),有

$$\omega_{0i}^2 = \frac{k_i}{m_i} \quad (1.4-8)$$

上述诸式中, i 和 k 的值为 $1, 2, \dots, n$ 。

式(c)、(d)、(e)、(f)写在一起,即

$$\boldsymbol{\varphi}_k^T \mathbf{M} \boldsymbol{\varphi}_i = \begin{cases} 0 & i \neq k \\ m_i & i = k \end{cases} \quad (i, k = 1, 2, \dots, n) \quad (1.4-9)$$

$$\boldsymbol{\varphi}_k^T \mathbf{K} \boldsymbol{\varphi}_i = \begin{cases} 0 & i \neq k \\ k_i & i = k \end{cases} \quad (i, k = 1, 2, \dots, n) \quad (1.4-10)$$

式(1.4-9)表明,第 k 阶模态惯性力在第 i 阶模态运动中做功为零;式(1.4-10)表明,第 k 阶模态弹性力在第 i 阶模态运动中做功为零。即各阶模态运动之间不发生能量交换,但每阶模态运动的能量(动能+势能)是守恒的,这一性质称为特征矢量关于 \mathbf{M} 、 \mathbf{K} 加权正交。

由式(1.4-9)、式(1.4-10)看出,模态质量 m_i 和模态刚度 k_i 均与 $\boldsymbol{\varphi}_i$ 的大小有关。而 $\boldsymbol{\varphi}_i$ 中各元素比例固定、大小不定。归一化方法不同, $\boldsymbol{\varphi}_i$ 大小不同,故得到的 m_i 、 k_i 值不同。所以,仅讨论 m_i 、 k_i 的数值大小无直接意义,其比值关系是确定的,如式(1.4-8)所示。

式(1.4-8)~式(1.4-10)也可写成矩阵形式

$$\boldsymbol{\varphi}^T \mathbf{M} \boldsymbol{\varphi} = \text{diag}[m_i] \quad (1.4-11)$$

$$\boldsymbol{\varphi}^T \mathbf{K} \boldsymbol{\varphi} = \text{diag}[k_i] \quad (1.4-12)$$

$$\boldsymbol{\Lambda} = \text{diag}[\omega_{0i}^2] \quad (1.4-13)$$

以上三式分别称为模态(主)质量矩阵、模态(主)刚度矩阵、谱矩阵。 diag 表示对角矩阵。

(3) 实模态坐标系中的自由响应

根据特征矢量的正交性, n 个线性无关的特征矢量 $\boldsymbol{\varphi}_i$ 构成一个 n 维矢量空间的完备正交基,称这一 n 维空间为模态空间或模态坐标系。对实模态系统,以 n 个模态矢量构造的模态空间为实线性空间。设物理坐标系中矢量 \mathbf{x} 在模态坐标系中的模态坐标为 y_i ($i = 1, 2, \dots, n$),则

$$\mathbf{x} = \sum_{i=1}^n \boldsymbol{\varphi}_i y_i = \boldsymbol{\varphi} \mathbf{y} \quad (1.4-14)$$

它是以 $\boldsymbol{\varphi}$ 为变换矩阵的线性变换,反映了物理坐标系与模态坐标系的关系,也称为模态展开定理。

将式(1.4-14)代入式(1.4-2),左乘 $\boldsymbol{\varphi}^T$,注意模态矢量的正交性式(1.4-11)、式(1.4-12),得

$$\text{diag}[m_i] \ddot{\mathbf{y}} + \text{diag}[k_i] \mathbf{y} = \mathbf{0} \quad (1.4-15)$$

可见,在模态坐标系中,无阻尼自由振动方程变成一组解耦的振动微分方程。写成正则形式:

$$\ddot{\mathbf{y}} + \text{diag}[\omega_{0i}^2] \mathbf{y} = \mathbf{0} \quad (1.4-16)$$

考虑初始条件

$$\mathbf{y}_0 = \boldsymbol{\varphi}^{-1} \mathbf{x}_0 = \text{diag}\left[\frac{1}{m_i}\right] \boldsymbol{\varphi}^T \mathbf{M} \mathbf{x}_0 \quad (1.4-17)$$

$$\dot{\mathbf{y}}_0 = \boldsymbol{\varphi}^{-1} \dot{\mathbf{x}}_0 = \text{diag}\left[\frac{1}{m_i}\right] \boldsymbol{\varphi}^T \mathbf{M} \dot{\mathbf{x}}_0 \quad (1.4-18)$$

得模态坐标系中的自由响应

$$y_i = Y_i \sin(\omega_{0i} t + \theta_i) \quad (1.4-19)$$

其中

$$\left. \begin{aligned} Y_i &= \sqrt{y_{0i}^2 + \frac{v_{0i}^2}{\omega_{0i}^2}} \\ \theta_i &= \arctan \frac{\omega_{0i} y_{0i}}{v_{0i}} \end{aligned} \right\} \quad (1.4-20)$$

为与初始条件有关的常量。

(4) 物理坐标系中的自由响应

将式(1.4-19)代入式(1.4-14), 得物理坐标系中的自由响应

$$\mathbf{x} = \sum_{i=1}^n \boldsymbol{\varphi}_i Y_i \sin(\omega_{0i} t + \theta_i) = \sum_{i=1}^n \mathbf{D}_i \sin(\omega_{0i} t + \theta_i) \quad (1.4-21)$$

式中

$$\mathbf{D}_i = \boldsymbol{\varphi}_i Y_i \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (1.4-22)$$

如果系统以某阶固有频率 ω_{0i} 振动, 则振动规律

$$\mathbf{x}_i = \mathbf{D}_i \sin(\omega_{0i} t + \theta_i) \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (1.4-23)$$

此即无阻尼系统的主振动。由式(1.4-22)可知, 因 Y_i 是与初始条件有关的常量, 则 $\mathbf{D}_i \propto \boldsymbol{\varphi}_i$ 。可见, 系统以某阶固有频率 ω_{0i} 做自由振动时, 振动形态 \mathbf{D}_i 与主振型 $\boldsymbol{\varphi}_i$ 完全相同。这就是主振型的物理意义。

下面进一步讨论主振型的性态。考察主振动下各个物理坐标的振动情况, 写出式(1.4-23)中 \mathbf{x}_i 的每个元素

$$\begin{aligned} x_{ki} &= D_{ki} \sin(\omega_{0i} t + \theta_i) = \varphi_{ki} Y_i \sin(\omega_{0i} t + \theta_i) \\ &\quad (k = 1, 2, \dots, n) \end{aligned} \quad (1.4-24)$$

在第 i 个主振动中, θ_i 为与初始条件有关的常值, 与物理坐标 k 无关。所以, 在每个主振动中各物理坐标 x_{ki} 的初始相位角 θ_i 相同。各物理坐标振动的相位角不是同相(相差 0°)就是反相(相差 180°), 即同时达到平衡位置和最大位置。这说明, 无阻尼振动系统的主振型具有模态(振型)保持性, 或“驻波形式”。这是实模态系统的模态特征。

2. 频响函数

(1) 频响函数矩阵

设无阻尼振动系统受简谐激励

$$\mathbf{f}(t) = \mathbf{F} e^{j\omega t} \quad (1.4-25)$$

其中 \mathbf{F} 为激励幅值列阵, n 阶。则系统稳态位移响应

$$\mathbf{x} = \mathbf{X} e^{j\omega t} \quad (1.4-26)$$

其中 \mathbf{X} 为稳态位移响应幅值列阵, n 阶。将式(1.4-25)、式(1.4-26)代入式(1.4-1), 得

$$(\mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M}) \mathbf{X} = \mathbf{F} \quad (1.4-27)$$

或

$$\mathbf{X} = \mathbf{H}(\omega) \mathbf{F} \quad (1.4-28)$$

其中

$$\mathbf{H}(\omega) = (\mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M})^{-1} \quad (1.4-29)$$

称为无阻尼振动系统的频响函数矩阵, $n \times n$ 阶, 是实对称矩阵。

(2) 频响函数的模态展式

将坐标变换式(1.4-14)代入式(1.4-1), 左乘 $\boldsymbol{\varphi}^T$, 并注意正交性式(1.4-11)、式(1.4-

12), 得模态坐标系下的强迫振动方程

$$\text{diag}[m_i] \ddot{\mathbf{y}} + \text{diag}[k_i] \mathbf{y} = \boldsymbol{\varphi}^T \mathbf{f}(t) \quad (1.4-30)$$

设稳态位移响应

$$\mathbf{y} = \mathbf{U} e^{i\omega t} \quad (1.4-31)$$

代入式(1.4-30)并考虑式(1.4-25), 得

$$\text{diag}[k_i - \omega^2 m_i] \mathbf{U} = \boldsymbol{\varphi}^T \mathbf{F}$$

则

$$\mathbf{U} = \text{diag}\left[\frac{1}{k_i - \omega^2 m_i}\right] \boldsymbol{\varphi}^T \mathbf{F} \quad (1.4-32)$$

将式(1.4-26)、式(1.4-31)代入式(1.4-14)并注意式(1.4-32), 有

$$\mathbf{X} = \boldsymbol{\varphi} \mathbf{U} = \boldsymbol{\varphi} \text{diag}\left[\frac{1}{k_i - \omega^2 m_i}\right] \boldsymbol{\varphi}^T \mathbf{F} = \sum_{i=1}^n \frac{\boldsymbol{\varphi}_i \boldsymbol{\varphi}_i^T}{k_i - \omega^2 m_i} \mathbf{F} \quad (1.4-33)$$

与式(1.4-28)比较, 有

$$\mathbf{H}(\omega) = \sum_{i=1}^n \frac{\boldsymbol{\varphi}_i \boldsymbol{\varphi}_i^T}{k_i - \omega^2 m_i} \quad (1.4-34)$$

称为无阻尼振动系统频响函数矩阵的模式展式。

由式(1.4-29)也可直接写出频响函数矩阵的模式展式(1.4-34)。事实上有

$$\begin{aligned} \mathbf{H}(\omega) &= \boldsymbol{\varphi} \boldsymbol{\varphi}^{-1} (\mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M})^{-1} (\boldsymbol{\varphi}^T)^{-1} \boldsymbol{\varphi}^T \\ &= \boldsymbol{\varphi} [\boldsymbol{\varphi}^T (\mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M}) \boldsymbol{\varphi}]^{-1} \boldsymbol{\varphi}^T \\ &= \boldsymbol{\varphi} [\text{diag}[k_i - \omega^2 m_i]]^{-1} \boldsymbol{\varphi}^T \\ &= \sum_{i=1}^n \frac{\boldsymbol{\varphi}_i \boldsymbol{\varphi}_i^T}{k_i - \omega^2 m_i} \end{aligned}$$

频响函数的模式展式中显含各种模态参数, 它是频域法参数识别的基础。

3. 脉冲响应函数

无论从脉冲响应函数物理意义还是从与频响函数的关系, 都容易求得多自由度无阻尼振动系统的脉冲响应函数。

频响函数矩阵模式展式(1.4-34)写成

$$\mathbf{H}(\omega) = \sum_{i=1}^n \frac{1}{m_i} \cdot \frac{\boldsymbol{\varphi}_i \boldsymbol{\varphi}_i^T}{\omega_{0i}^2 - \omega^2} \quad (1.4-35)$$

其傅氏逆变换即脉冲响应函数矩阵, 为 $n \times n$ 阶实对称矩阵

$$\mathbf{h}(t) = \mathcal{F}^{-1}[\mathbf{H}(\omega)] = \sum_{i=1}^n \frac{\boldsymbol{\varphi}_i \boldsymbol{\varphi}_i^T}{m_i \omega_{0i}} \sin \omega_{0i} t \quad (t \geq 0) \quad (1.4-36)$$

其中第 e 行第 f 列元素 $h_{ef}(t)$ 表示仅在第 f 个物理坐标作用单位脉冲力, 在第 e 个物理坐标产生的脉冲响应

$$h_{ef}(t) = \sum_{i=1}^n \frac{\varphi_{ei} \varphi_{fi}}{m_i \omega_{0i}} \sin \omega_{0i} t \quad (t \geq 0) \quad (1.4-37)$$

1.4.2 粘性比例阻尼系统

具有粘性阻尼的 n 自由度系统振动微分方程

$$M\ddot{x} + C\dot{x} + Kx = f(t) \quad (1.4-38)$$

其中 C 为粘性阻尼矩阵, 正定或半正定对称矩阵, $n \times n$ 阶; \dot{x} 为速度列阵, n 阶。其余符号含义同前。

粘性阻尼矩阵 C 一般不能利用上节模态矢量的正交性对角化, 故不能应用坐标变换直接将式(1.4-38)解耦。但在特殊情况下 C 可以利用正交性对角化, 如 Rayleigh 提出的粘性比例阻尼模型

$$C = \alpha M + \beta K \quad (1.4-39)$$

式中 α, β 分别为与系统外、内阻尼有关的常数。显然, 这时 C 可对角化。对某些小阻尼振动系统, 这一模型是有效的。

Fawzy 论证了更一般的可对角化的比例阻尼矩阵 C 应满足下列三个条件之一

$$\left. \begin{aligned} MC^{-1}K &= KC^{-1}M \\ KM^{-1}C &= CM^{-1}K \\ CK^{-1}M &= MK^{-1}C \end{aligned} \right\} \quad (1.4-40)$$

1. 自由振动

令 $f(t) = 0$, 则式(1.4-38)变成

$$M\ddot{x} + C\dot{x} + Kx = 0 \quad (1.4-41)$$

式中 C 为满足式(1.4-39)的粘性比例阻尼矩阵。

(1) 特征值问题

设特解

$$x = \varphi e^{\lambda t} \quad (1.4-42)$$

式中 φ 为自由响应幅值列阵。式(1.4-42)代入式(1.4-41), 得特征值问题

$$(\lambda^2 M + \lambda C + K)\varphi = 0 \quad (1.4-43)$$

特征方程

$$|\lambda^2 M + \lambda C + K| = 0 \quad (1.4-44)$$

这是 λ 的 $2n$ 次实系数代数方程。设无重根, 解得 $2n$ 个共轭对形式的互异特征值

$$\left. \begin{aligned} \lambda_i &= -\sigma_i + j\omega_{di} \\ \lambda_i^* &= -\sigma_i - j\omega_{di} \end{aligned} \right\} \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (1.4-45)$$

且

$$|\lambda_i| = |\lambda_i^*| = \sqrt{\sigma_i^2 + \omega_{di}^2} = \omega_{0i} \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (1.4-46)$$

式中, λ_i 的实部代表衰减系数; 虚部 ω_{di} 即阻尼固有频率。 λ_i 的模等于无阻尼固有频率 ω_{0i} 。可见, λ_i 反映了系统的固有特性, 且具有频率量纲, 称为复频率。

将 $2n$ 个特征值 λ_i, λ_i^* 代入式(1.4-43), 解得 $2n$ 个共轭特征矢量 φ_i, φ_i^* 。可以证明, 它们为实矢量, 且与无阻尼振动系统的特征矢量相等, 则 $\varphi_i = \varphi_i^*$, 故独立的特征矢量只有 n 个。将这 n 个特征矢量 φ_i 按列排列, 得特征矢量矩阵即模态矩阵 $\Phi, n \times n$ 阶。

(2) 特征矢量的正交性

特征矢量 φ_i 或模态矩阵 Φ 不仅具有关于 M, K 的正交性式(1.4-9)~(1.4-12), 还关于粘性比例阻尼矩阵 C 加权正交, 即

$$\Phi^T C \Phi = \text{diag}[\alpha m_i + \beta k_i] = \text{diag}[c_i] \quad (1.4-47)$$

式中

$$c_i = \alpha m_i + \beta k_i \quad (1.4-48)$$

称为模态粘性比例阻尼系数, $\text{diag}[c_i]$ 称为模态粘性比例阻尼矩阵。

(3) 实模态坐标系中的自由响应

取坐标变换式(1.4-14), 代入式(1.4-41)并考虑特征矢量的正交性, 得一组解耦方程

$$\text{diag}[m_i] \ddot{\mathbf{y}} + \text{diag}[c_i] \dot{\mathbf{y}} + \text{diag}[k_i] \mathbf{y} = \mathbf{0} \quad (1.4-49)$$

或写成正则形式

$$\ddot{\mathbf{y}} + \text{diag}[2\sigma_i] \dot{\mathbf{y}} + \text{diag}[\omega_{di}^2] \mathbf{y} = \mathbf{0} \quad (1.4-50)$$

式中

$$2\sigma_i = \frac{c_i}{m_i} \quad (i=1, 2, \dots, n)$$

考虑初始条件式(1.4-17)、(1.4-18), 得方程(1.4-50)的解

$$y_i = Y_i e^{-\sigma_i t} \sin(\omega_{di} t + \theta_i) \quad (1.4-51)$$

式中

$$\left. \begin{aligned} Y_i &= \sqrt{y_{0i}^2 + \left(\frac{\dot{y}_{0i} + \sigma_i y_{0i}}{\omega_{di}} \right)^2} \\ \theta_i &= \arctan \frac{\omega_{di} y_{0i}}{\dot{y}_{0i} + \sigma_i y_{0i}} \end{aligned} \right\} \quad (1.4-52)$$

为与初始条件有关的常数。

(4) 物理坐标系中的自由响应

将式(1.4-51)代入式(1.4-14), 得

$$\mathbf{x} = \sum_{i=1}^n \boldsymbol{\varphi}_i Y_i e^{-\sigma_i t} \sin(\omega_{di} t + \theta_i) = \sum_{i=1}^n \mathbf{D}_i e^{-\sigma_i t} \sin(\omega_{di} t + \theta_i) \quad (1.4-53)$$

式中 \mathbf{D}_i 如式(1.4-22)所示。

如果系统以某阶阻尼固有频率 ω_{di} 振动, 则振动规律为

$$\mathbf{x}_i = \mathbf{D}_i e^{-\sigma_i t} \sin(\omega_{di} t + \theta_i) \quad (1.4-54)$$

此即粘性比例阻尼系统的主振动, 振动形态为 $\mathbf{D}_i \propto \boldsymbol{\varphi}_i$, 所以主振型 $\boldsymbol{\varphi}_i$ 反映了系统主振动的形态。

式(1.4-54)中 \mathbf{x}_i 的每个元素即在第 i 阶主振动下各个物理坐标的自由响应

$$\begin{aligned} x_{ki} &= D_{ki} e^{-\sigma_i t} \sin(\omega_{di} t + \theta_i) = \varphi_{ki} Y_i e^{-\sigma_i t} \sin(\omega_{di} t + \theta_i) \\ (k &= 1, 2, \dots, n) \end{aligned} \quad (1.4-55)$$

可见, 系统在第 i 阶主振动中, 各物理坐标作自由衰减振动的初相位相同, 均为 θ_i 。与无阻尼振动系统相同, 粘性比例阻尼系统亦具有模态保持性。

2. 频响函数

(1) 频响函数矩阵

设系统受简谐激励式(1.4-25), 稳态位移响应如式(1.4-26), 将此二式代入式(1.4-38), 得

$$(\mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M} + j\omega \mathbf{C}) \mathbf{X} = \mathbf{F} \quad (1.4-56)$$

或

$$\mathbf{X} = \mathbf{H}(\omega) \mathbf{F} \quad (1.4-57)$$

式中频响函数矩阵

$$\mathbf{H}(\omega) = (\mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M} + j\omega \mathbf{C})^{-1} \quad (1.4-58)$$

为复对称矩阵, $n \times n$ 阶。

(2) 频响函数的模态展式

将坐标变换式(1.4-14)代入式(1.4-38), 左乘 $\boldsymbol{\varphi}^T$ 并注意正交性式(1.4-11)、式(1.4-12)、式(1.4-47), 得解耦方程组

$$\text{diag}[m_i] \ddot{\mathbf{y}} + \text{diag}[c_i] \dot{\mathbf{y}} + \text{diag}[k_i] \mathbf{y} = \boldsymbol{\varphi}^T \mathbf{f}(t) \quad (1.4-59)$$

将稳态位移响应式(1.4-31)代入式(1.4-59), 并考虑式(1.4-25), 得

$$\text{diag}[k_i - \omega^2 m_i + j\omega c_i] \mathbf{U} = \boldsymbol{\varphi}^T \mathbf{F}$$

则

$$\mathbf{U} = \text{diag}\left[\frac{1}{k_i - \omega^2 m_i + j\omega c_i}\right] \boldsymbol{\varphi}^T \mathbf{F} \quad (1.4-60)$$

将式(1.4-26)、式(1.4-31)代入式(1.4-14), 并注意式(1.4-60), 有

$$\mathbf{X} = \boldsymbol{\varphi} \mathbf{U} = \boldsymbol{\varphi} \text{diag}\left[\frac{1}{k_i - \omega^2 m_i + j\omega c_i}\right] \boldsymbol{\varphi}^T \mathbf{F} = \sum_{i=1}^n \frac{\boldsymbol{\varphi}_i \boldsymbol{\varphi}_i^T}{k_i - \omega^2 m_i + j\omega c_i} \mathbf{F} \quad (1.4-61)$$

与式(1.4-57)比较, 得频响函数的模态展式

$$\mathbf{H}(\omega) = \sum_{i=1}^n \frac{\boldsymbol{\varphi}_i \boldsymbol{\varphi}_i^T}{k_i - \omega^2 m_i + j\omega c_i} \quad (1.4-62)$$

也可由式(1.4-58)直接导出上式。

3. 脉冲响应函数

将式(1.4-62)写成

$$\mathbf{H}(\omega) = \sum_{i=1}^n \frac{1}{m_i} \cdot \frac{\boldsymbol{\varphi}_i \boldsymbol{\varphi}_i^T}{(j\omega + \sigma_i)^2 + \omega_{di}^2} \quad (1.4-63)$$

作傅氏逆变换, 得脉冲响应函数矩阵

$$\mathbf{h}(t) = \sum_{i=1}^n \frac{\boldsymbol{\varphi}_i \boldsymbol{\varphi}_i^T}{m_i \omega_{di}} e^{-\sigma_i t} \sin \omega_{di} t \quad (1.4-64)$$

1.4.3 结构比例阻尼系统

具有结构阻尼的 n 自由度系统振动微分方程

$$\mathbf{M} \ddot{\mathbf{x}} + (\mathbf{K} + j\mathbf{G}) \mathbf{x} = \mathbf{F} e^{j\omega t} \quad (1.4-65)$$

其中 \mathbf{G} 为结构阻尼矩阵, 是正定或半正定实对称矩阵, $n \times n$ 阶。 $(\mathbf{K} + j\mathbf{G})$ 称为复刚度矩阵, $n \times n$ 阶复对称矩阵。

如果

$$\mathbf{G} = \alpha \mathbf{M} + \beta \mathbf{K} \quad (1.4-66)$$

则称为结构比例阻尼。

1. 特征值问题

设 $\mathbf{F} = \mathbf{0}$, 则式(1.4-65)成为

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}} + (\mathbf{K} + \mathbf{jG})\mathbf{x} = \mathbf{0} \quad (1.4-67)$$

设其特解

$$\mathbf{x} = \boldsymbol{\varphi} e^{\lambda t} \quad (1.4-68)$$

代入式(1.4-67),得

$$(\lambda^2 \mathbf{M} + \mathbf{K} + \mathbf{jG})\boldsymbol{\varphi} = \mathbf{0} \quad (1.4-69)$$

这是以 λ^2 为特征值、 $\boldsymbol{\varphi}$ 为特征矢量的广义特征值问题。

特征方程

$$|\lambda^2 \mathbf{M} + \mathbf{K} + \mathbf{jG}| = 0 \quad (1.4-70)$$

解之,得 n 个互异复特征值 λ_i^2 。 λ_i^2 可按无阻尼振动系统特征值求法求出。式(1.4-66)代入式(1.4-69),得

$$[(\lambda^2 + \mathbf{j}\alpha)\mathbf{M} + (1 + \mathbf{j}\beta)\mathbf{K}]\boldsymbol{\varphi} = \mathbf{0} \quad (1.4-71)$$

这是关于 $(\lambda^2 + \mathbf{j}\alpha)$ 的广义特征值问题。参考无阻尼系统特征值问题的求解,有

$$\lambda_i^2 + \mathbf{j}\alpha = -(1 + \mathbf{j}\beta)\omega_{0i}^2$$

即

$$\lambda_i^2 = -\omega_{0i}^2 - \mathbf{j}(\alpha + \beta\omega_{0i}^2) = -\omega_{0i}^2(1 + \mathbf{j}\eta_i) \quad (1.4-72)$$

式中

$$\eta_i = \frac{\alpha}{\omega_{0i}^2} + \beta \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (1.4-73)$$

为无量纲模态阻尼比, ω_{0i} 为无阻尼固有频率。可见,特征值 λ_i^2 反映了系统固有频率与模态阻尼的特性。

将每个 λ_i^2 逐一代入式(1.4-69),得 n 个实特征矢量 $\boldsymbol{\varphi}_i$, 与无阻尼振动系统特征矢量相同。将 $\boldsymbol{\varphi}_i$ 按列排列成模态矩阵 $\boldsymbol{\Phi}$, 可证 $\boldsymbol{\varphi}_i$ 或 $\boldsymbol{\Phi}$ 具有式(1.4-9)~式(1.4-12)形式的正交性, 并且

$$\boldsymbol{\Phi}^T \mathbf{G} \boldsymbol{\Phi} = \text{diag}[\alpha m_i + \beta k_i] = \text{diag}[g_i] \quad (1.4-74)$$

式中

$$g_i = \alpha m_i + \beta k_i = \left(\frac{\alpha}{\omega_{0i}^2} + \beta \right) k_i = \eta_i k_i \quad (1.4-75)$$

$$\omega_{0i}^2 = \frac{k_i}{m_i}$$

g_i 称为模态结构比例阻尼系数, $\text{diag}[g_i]$ 称为结构比例阻尼矩阵。

2. 频响函数

(1) 频响函数矩阵

设式(1.4-65)稳态位移响应如式(1.4-26),将此式代入式(1.4-65),得

$$(\mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M} + \mathbf{jG})\mathbf{X} = \mathbf{F} \quad (1.4-76)$$

或

$$\mathbf{X} = \mathbf{H}(\omega)\mathbf{F} \quad (1.4-77)$$

式中频响函数矩阵

$$\mathbf{H}(\omega) = (\mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M} + \mathbf{jG})^{-1} \quad (1.4-78)$$

为复对称矩阵, $n \times n$ 阶。

(2) 频响函数的模态展式

将坐标变换式(1.4-14)代入式(1.4-65), 左乘 $\boldsymbol{\varphi}^T$ 并利用正交关系式(1.4-11)、式(1.4-12)、式(1.4-74), 得解耦方程组

$$\text{diag}[m_i] \ddot{\mathbf{y}} + \text{diag}[k_i + jg_i] \mathbf{y} = \boldsymbol{\varphi}^T \mathbf{F} e^{j\omega t} \quad (1.4-79)$$

将稳态位移响应式(1.4-31)代入式(1.4-79), 得

$$\text{diag}[k_i - \omega^2 m_i + jg_i] \mathbf{U} = \boldsymbol{\varphi}^T \mathbf{F} \quad (1.4-80)$$

则

$$\mathbf{U} = \text{diag}\left[\frac{1}{k_i - \omega^2 m_i + jg_i}\right] \boldsymbol{\varphi}^T \mathbf{F} \quad (1.4-81)$$

将式(1.4-26)、式(1.4-31)代入式(1.4-14), 并注意式(1.4-81), 有

$$\mathbf{X} = \boldsymbol{\varphi} \mathbf{U} = \boldsymbol{\varphi} \text{diag}\left[\frac{1}{k_i - \omega^2 m_i + jg_i}\right] \boldsymbol{\varphi}^T \mathbf{F} = \sum_{i=1}^n \frac{\boldsymbol{\varphi}_i \boldsymbol{\varphi}_i^T}{k_i - \omega^2 m_i + jg_i} \mathbf{F} \quad (1.4-82)$$

与式(1.4-77)比较, 得频响函数模态展式

$$\mathbf{H}(\omega) = \sum_{i=1}^n \frac{\boldsymbol{\varphi}_i \boldsymbol{\varphi}_i^T}{k_i - \omega^2 m_i + jg_i} = \sum_{i=1}^n \frac{\boldsymbol{\varphi}_i \boldsymbol{\varphi}_i^T}{k_i - \omega^2 m_i + j\eta_i k_i} \quad (1.4-83)$$

亦可由式(1.4-78)直接导出上式。

1.5 多自由度系统的复模态分析

具有一般粘性阻尼和一般结构阻尼振动系统的模态矢量是复矢量, 故称该系统为复模态系统, 有关的模态分析基本理论称为复模态分析。

1.5.1 一般粘性阻尼系统

一般粘性阻尼系统的振动微分方程

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{x}} + \mathbf{K}\mathbf{x} = \mathbf{f}(t) \quad (1.4-38)$$

式中 \mathbf{C} 为一般粘性阻尼矩阵, 设为正定对称矩阵, 且不满足对角化条件式(1.4-39)或式(1.4-40)。

引入辅助方程

$$\mathbf{M}\dot{\mathbf{x}}' - \mathbf{M}\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{0}$$

与式(1.4-38)合写为

$$\mathbf{P}\dot{\mathbf{x}}' + \mathbf{Q}\mathbf{x}' = \mathbf{f}'(t) \quad (1.5-1)$$

式中

$$\mathbf{x}' = \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \dot{\mathbf{x}} \end{bmatrix}, \quad 2n \text{ 阶, 称为状态空间矢量} \quad (1.5-2)$$

$$\mathbf{f}'(t) = \begin{bmatrix} \mathbf{f}(t) \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}, \quad 2n \text{ 阶} \quad (1.5-3)$$

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} \mathbf{C} & \mathbf{M} \\ \mathbf{M} & \mathbf{0} \end{bmatrix}, \quad 2n \times 2n \text{ 阶对称矩阵, 正定} \quad (1.5-4)$$

$$Q = \begin{bmatrix} K & 0 \\ 0 & -M \end{bmatrix}, \quad 2n \times 2n \text{ 阶对称矩阵, 正定或半正定} \quad (1.5-5)$$

式(1.5-1)称为系统的状态空间方程, 由 $2n$ 个一阶线性微分方程组成。

1. 自由振动

令 $f'(t) = 0$, 式(1.5-1)变成

$$P\dot{x}' + Qx' = 0 \quad (1.5-6)$$

(1) 特征值问题

设特解为

$$x' = \psi' e^{\lambda t} \quad (1.5-7)$$

式中 ψ' 为 x' 的幅值列阵, $2n$ 阶。将上式代入式(1.5-6), 得广义特征值问题

$$(\lambda P + Q)\psi' = 0 \quad (1.5-8)$$

特征方程

$$|\lambda P + Q| = 0 \quad (1.5-9)$$

这是关于 λ 的 $2n$ 次实系数代数方程。为考察这一特征方程的解, 先讨论式(1.4-38)的特征方程根的情况。由 1.4.2 节可知, 式(1.4-38)特征方程如式(1.4-44), 其根以共轭对出现, 共 $2n$ 个。式(1.4-38)与式(1.5-1)所表示的系统为同一系统, 故应有相同的特征值。所以, 式(1.5-9)有 $2n$ 个以共轭对出现的互异复特征值 λ_i, λ_i^* , 即复频率

$$\left. \begin{aligned} \lambda_i &= -\sigma_{mi} + j\omega_{mdi} \\ \lambda_i^* &= -\sigma_{mi} - j\omega_{mdi} \end{aligned} \right\} \quad (i=1, 2, \dots, n) \quad (1.5-10)$$

将 $2n$ 个特征值 λ_i, λ_i^* 代入式(1.5-8), 得 $2n$ 个共轭复特征矢量 ψ'_i, ψ'^{*}_i , $2n$ 维, 记为

$$\psi'_i = \begin{bmatrix} \psi_i \\ \lambda_i \psi_i \end{bmatrix}, \quad \psi'^{*}_i = \begin{bmatrix} \psi_i^* \\ \lambda_i^* \psi_i^* \end{bmatrix} \quad (i=1, 2, \dots, n) \quad (1.5-11)$$

式中, ψ_i, ψ_i^* 即为系统的模态矢量, 为 n 维复矢量。事实上, ψ_i, ψ_i^* 是对应式(1.4-38)特征值问题的特征矢量。注意 ψ'_i 与 ψ'^{*}_i 是对应状态方程式(1.5-1)特征值问题的特征矢量, 故不称之为模态矢量, 而 ψ_i, ψ_i^* 既可称为特征矢量, 又可称为模态矢量。

复模态矢量 ψ_i, ψ_i^* 不具备关于 M, K, C 加权正交性, 故不以它们构造特征矢量矩阵作为坐标变换矩阵, 而是以 ψ'_i, ψ'^{*}_i 来构造。 ψ'_i, ψ'^{*}_i 按列排列

$$\Psi' = [\psi'_1 \quad \psi'_2 \quad \dots \quad \psi'_n \quad \psi'^{*}_1 \quad \psi'^{*}_2 \quad \dots \quad \psi'^{*}_n] = \begin{bmatrix} \Psi & \Psi^* \\ \Lambda \Psi & \Lambda^* \Psi^* \end{bmatrix} \quad (1.5-12)$$

式中

$$\left. \begin{aligned} \Psi &= [\psi_1 \quad \psi_2 \quad \dots \quad \psi_n] \\ \Psi^* &= [\psi_1^* \quad \psi_2^* \quad \dots \quad \psi_n^*] \\ \Lambda &= \text{diag}[\lambda_1, \dots, \lambda_n], \quad \Lambda^* = \text{diag}[\lambda_1^*, \dots, \lambda_n^*] \end{aligned} \right\} \quad (1.5-13)$$

它们均为 $n \times n$ 阶复矩阵。 Ψ 称为复模态矩阵, Λ 称为谱矩阵或复频率矩阵, Ψ' 称为特征矢量矩阵。

(2) 复特征矢量的正交性

设特征值无重根, 将两组特征对代入式(1.5-8), 稍加整理, 得

$$\boldsymbol{\psi}_k'^T \mathbf{P} \boldsymbol{\psi}_i' = \begin{cases} 0 & i \neq k \\ a_i & i = k \end{cases} \quad (i, k = 1, 2, \dots, n) \quad (1.5-14)$$

$$\boldsymbol{\psi}_k'^H \mathbf{P} \boldsymbol{\psi}_i'^* = \begin{cases} 0 & i \neq k \\ a_i^* & i = k \end{cases} \quad (i, k = 1, 2, \dots, n) \quad (1.5-15)$$

$$\boldsymbol{\psi}_k'^T \mathbf{Q} \boldsymbol{\psi}_i' = \begin{cases} 0 & i \neq k \\ b_i & i = k \end{cases} \quad (i, k = 1, 2, \dots, n) \quad (1.5-16)$$

$$\boldsymbol{\psi}_k'^H \mathbf{Q} \boldsymbol{\psi}_i'^* = \begin{cases} 0 & i \neq k \\ b_i^* & i = k \end{cases} \quad (i, k = 1, 2, \dots, n) \quad (1.5-17)$$

且

$$\lambda_i = -\frac{b_i}{a_i}, \lambda_i^* = -\frac{b_i^*}{a_i^*} \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (1.5-18)$$

注意 \mathbf{P} 为正定矩阵, 故 $a_i \neq 0, a_i^* \neq 0$ 。式(1.5-14)~式(1.5-17)说明特征矢量 $\boldsymbol{\psi}_i'$ 关于 \mathbf{P} 、 \mathbf{Q} 加权正交, 不过此时无明确物理意义。

式(1.5-14)~式(1.5-17)可写成矩阵形式

$$\boldsymbol{\psi}'^T \mathbf{P} \boldsymbol{\psi}' = \text{diag}[a_i, a_i^*] \quad (1.5-19)$$

$$\boldsymbol{\psi}'^H \mathbf{Q} \boldsymbol{\psi}' = \text{diag}[b_i, b_i^*] \quad (1.5-20)$$

式中, $\text{diag}[a_i, a_i^*]$ 表示的对角阵中, 前 n 个对角元素为 a_i , 后 n 个对角元素为 a_i^* 。 $\text{diag}[b_i, b_i^*]$ 含义相同。

将式(1.5-14)~式(1.5-17)展开, 可写成

$$\boldsymbol{\psi}_k'^T [(\lambda_i + \lambda_k) \mathbf{M} + \mathbf{C}] \boldsymbol{\psi}_i' = \begin{cases} 0 & i \neq k \\ a_i & i = k \end{cases} \quad (1.5-21)$$

$$\boldsymbol{\psi}_k'^H [(\lambda_i^* + \lambda_k^*) \mathbf{M} + \mathbf{C}] \boldsymbol{\psi}_i'^* = \begin{cases} 0 & i \neq k \\ a_i^* & i = k \end{cases} \quad (1.5-22)$$

$$\boldsymbol{\psi}_k'^T (\mathbf{K} - \lambda_i \lambda_k \mathbf{M}) \boldsymbol{\psi}_i' = \begin{cases} 0 & i \neq k \\ b_i & i = k \end{cases} \quad (1.5-23)$$

$$\boldsymbol{\psi}_k'^H (\mathbf{K} - \lambda_i^* \lambda_k^* \mathbf{M}) \boldsymbol{\psi}_i'^* = \begin{cases} 0 & i \neq k \\ b_i^* & i = k \end{cases} \quad (1.5-24)$$

可见, 复模态矢量 $\boldsymbol{\psi}_i$ 不具备实模态系统中模态矢量 $\boldsymbol{\phi}_i$ 那样关于 \mathbf{M} 、 \mathbf{K} 、 \mathbf{C} 的正交性。

将式(1.5-19)分块展开, 得

$$\boldsymbol{\psi}^T (2\mathbf{A}\mathbf{M} + \mathbf{C}) \boldsymbol{\psi} = \text{diag}[a_i] \quad (1.5-25)$$

$$\boldsymbol{\psi}^H (2\mathbf{A}^* \mathbf{M} + \mathbf{C}) \boldsymbol{\psi}^* = \text{diag}[a_i^*] \quad (1.5-26)$$

$$\boldsymbol{\psi}^H (2\text{Re}\mathbf{A}\mathbf{M} + \mathbf{C}) \boldsymbol{\psi} = \mathbf{0} \quad (1.5-27)$$

式中 $\text{Re}\mathbf{A} = \text{diag}[\text{Re}\lambda_i]$ 。

将式(1.5-20)分块展开, 得

$$\boldsymbol{\psi}^T (\mathbf{K} - \mathbf{A}^2 \mathbf{M}) \boldsymbol{\psi} = \text{diag}[b_i] \quad (1.5-28)$$

$$\boldsymbol{\psi}^H (\mathbf{K} - \mathbf{A}^{*2} \mathbf{M}) \boldsymbol{\psi}^* = \text{diag}[b_i^*] \quad (1.5-29)$$

$$\boldsymbol{\psi}^H (\mathbf{K} - \mathbf{A}\mathbf{A}^* \mathbf{M}) \boldsymbol{\psi} = \mathbf{0} \quad (1.5-30)$$

式(1.5-25)、式(1.5-26)、式(1.5-28)、式(1.5-29)是用模态矩阵表示的正交性。

定义复模态质量 m_{mi} 、复模态刚度 k_{mi} 、复模态阻尼 c_{mi} 如下:

$$\left. \begin{aligned} m_{mi} &= \psi_i^H M \psi_i \\ k_{mi} &= \psi_i^H K \psi_i \\ c_{mi} &= \psi_i^H C \psi_i \end{aligned} \right\} \quad (i=1, 2, \dots, n) \quad (1.5-31)$$

由式(1.5-27)、式(1.5-30)可得(对角线元素)

$$2\operatorname{Re}\lambda_i m_{mi} + c_{mi} = 0 \quad (i=1, 2, \dots, n) \quad (1.5-32)$$

$$k_{mi} - \lambda_i \lambda_i^* m_{mi} = 0 \quad (i=1, 2, \dots, n) \quad (1.5-33)$$

由式(1.5-32)得 $\operatorname{Re}\lambda_i = -\frac{c_{mi}}{2m_{mi}}$ 。定义复模态阻尼衰减系数

$$\sigma_{mi} = \frac{c_{mi}}{2m_{mi}} \quad (1.5-34)$$

则

$$\operatorname{Re}\lambda_i = -\sigma_{mi} \quad (1.5-35)$$

由式(1.5-33)得 $|\lambda_i|^2 = \frac{k_{mi}}{m_{mi}}$, 定义复模态固有频率

$$\omega_{mi} = \sqrt{\frac{k_{mi}}{m_{mi}}} \quad (1.5-36)$$

则

$$|\lambda_i| = \omega_{mi} \quad (1.5-37)$$

所以

$$\operatorname{Im}\lambda_i = \sqrt{|\lambda_i|^2 - (\operatorname{Re}\lambda_i)^2} = \sqrt{\omega_{mi}^2 - \sigma_{mi}^2} \quad (1.5-38)$$

定义复模态阻尼固有频率(特征频率) ω_{mdi} 及复模态阻尼比 ζ_{mi} 分别为

$$\omega_{mdi} = \sqrt{\omega_{mi}^2 - \sigma_{mi}^2} = \omega_{mi} \sqrt{1 - \zeta_{mi}^2} \quad (1.5-39)$$

$$\zeta_{mi} = \frac{\sigma_{mi}}{\omega_{mi}} \quad (1.5-40)$$

则复频率

$$\left. \begin{aligned} \lambda_i &= -\sigma_{mi} + j\omega_{mdi} = -\zeta_{mi}\omega_{mi} + j\omega_{mi}\sqrt{1-\zeta_{mi}^2} \\ \lambda_i^* &= -\sigma_{mi} - j\omega_{mdi} = -\zeta_{mi}\omega_{mi} - j\omega_{mi}\sqrt{1-\zeta_{mi}^2} \end{aligned} \right\} \quad (1.5-41)$$

这就是一般粘性阻尼系统复频率的物理意义。以上诸式中均设 $i=1, 2, \dots, n$ 。

上面定义的复模态参数 m_{mi} 、 k_{mi} 、 c_{mi} 、 σ_{mi} 、 ζ_{mi} 、 ω_{mi} 、 ω_{mdi} 均为实数, 它们与实模态系统中 m_i 、 k_i 、 c_i 、 σ_i 、 ζ_i 、 ω_{0i} 、 ω_{di} 并不相等。当为粘性比例阻尼时, 复模态参数退化为实模态参数。

(3) 复模态坐标系中的自由响应

根据一般粘性阻尼系统复特征矢量 ψ_i' 、 $\psi_i'^*$ 的正交性, 这 $2n$ 个线性无关的复矢量构成了一个 $2n$ 维复矢量空间的完备正交基。该复矢量空间与状态空间可由变换

$$\mathbf{x}' = \Psi' \mathbf{y}' \quad (1.5-42)$$

相联系。式中

$$\mathbf{y}' = \begin{bmatrix} \mathbf{y} \\ \mathbf{y}^* \end{bmatrix} \quad (1.5-43)$$

为 \mathbf{x}' 在这一复矢量空间中的坐标矢量, $2n$ 维, \mathbf{y}, \mathbf{y}^* 为 n 阶列阵。

将式(1.5-42)代入式(1.5-6), 左乘 $\boldsymbol{\Psi}'^T$ 并利用复特征矢量正交性式(1.5-19)、式(1.5-20), 得解耦方程组

$$\text{diag}[a_i, a_i^*] \dot{\mathbf{y}}' + \text{diag}[b_i, b_i^*] \mathbf{y}' = \mathbf{0} \quad (1.5-44)$$

它是 $2n$ 个一阶方程的方程组, 前 n 个方程与后 n 个方程是共轭关系。

易得式(1.5-44)的解

$$\mathbf{y}' = \text{diag}[e^{\lambda_i t}, e^{\lambda_i^* t}] \mathbf{y}'(0) \quad (1.5-45)$$

式中初始条件

$$\mathbf{y}'(0) = \begin{bmatrix} \mathbf{y}(0) \\ \mathbf{y}^*(0) \end{bmatrix} = \boldsymbol{\Psi}'^{-1} \mathbf{x}'(0) = \text{diag}\left[\frac{1}{a_i}, \frac{1}{a_i^*}\right] \boldsymbol{\Psi}'^T \mathbf{P} \mathbf{x}'(0) \quad (1.5-46)$$

(4) 物理坐标系中的自由响应

将式(1.5-45)代入坐标变换式(1.5-42), 取前 n 个元素, 得物理坐标中的位移自由响应

$$\begin{aligned} \mathbf{x} &= \boldsymbol{\Psi} \text{diag}[e^{\lambda_i t}] \mathbf{y}(0) + \boldsymbol{\Psi}^* \text{diag}[e^{\lambda_i^* t}] \mathbf{y}^*(0) \\ &= \sum_{i=1}^n (\boldsymbol{\Psi}_i y_i(0) e^{\lambda_i t} + \boldsymbol{\Psi}_i^* y_i^*(0) e^{\lambda_i^* t}) \end{aligned} \quad (1.5-47)$$

设

$$y_i(0) = T_i e^{j\theta_i}, y_i^*(0) = T_i e^{-j\theta_i} \quad (i=1, 2, \dots, n)$$

注意式(1.5-41), 则式(1.5-47)可写成

$$\mathbf{x} = \sum_{i=1}^n T_i e^{-\sigma_{mi} t} (\boldsymbol{\Psi}_i e^{j(\omega_{mdi} t + \theta_i)} + \boldsymbol{\Psi}_i^* e^{-j(\omega_{mdi} t + \theta_i)}) \quad (1.5-48)$$

当系统以某阶复模态频率 ω_{mdi} 做主振动时, 振动规律

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_i &= T_i e^{-\sigma_{mi} t} (\boldsymbol{\Psi}_i e^{j(\omega_{mdi} t + \theta_i)} + \boldsymbol{\Psi}_i^* e^{-j(\omega_{mdi} t + \theta_i)}) \\ &\quad (i=1, 2, \dots, n) \end{aligned} \quad (1.5-49)$$

每个物理坐标点的振动规律

$$\begin{aligned} x_{ki} &= T_i e^{-\sigma_{mi} t} (\phi_{ki} e^{j(\omega_{mdi} t + \theta_i)} + \phi_{ki}^* e^{-j(\omega_{mdi} t + \theta_i)}) \\ &\quad (k=1, 2, \dots, n) \end{aligned} \quad (1.5-50)$$

设

$$\phi_{ki} = \eta_{ki} e^{j\gamma_{ki}}, \phi_{ki}^* = \eta_{ki} e^{-j\gamma_{ki}} \quad (i=1, 2, \dots, n)$$

则

$$x_{ki} = 2T_i \eta_{ki} e^{-\sigma_{mi} t} \cos(\omega_{mdi} t + \theta_i + \gamma_{ki}) \quad (i, k=1, 2, \dots, n) \quad (1.5-51)$$

可见, 一般粘性阻尼系统以某阶主振动做自由振动时, 每个物理坐标的初相位 $(\theta_i + \gamma_{ki})$ 不仅与该阶主振动有关, 还与物理坐标 k 有关, 即各物理坐标初相位不同。因而, 每个物理坐标振动时并不同时达到平衡位置和最大位置, 即主振型节点(线)是变化的。由式(1.5-49)也可看出, \mathbf{x}_i 的幅值或振动形态不像实模态系统那样能保持与模态矢量相同的状态, 没有 $\mathbf{D}_i \propto \boldsymbol{\varphi}_i$ 那样的关系, 即不具备模态保持性, 主振型不再是驻波形式, 而是行波形式。这是复模态系

统的特点,如图 1.5-1 所示。

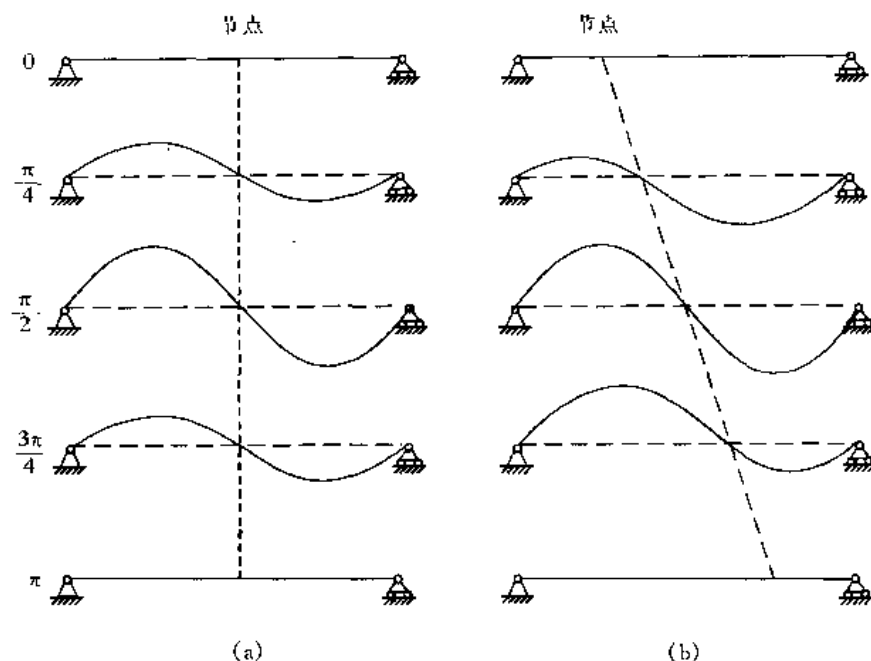


图 1.5-1 简支梁二阶振型半个周期内的变化
(a) 实模态系统; (b) 复模态系统

2. 频响函数

(1) 频响函数矩阵

设系统受到的简谐激励为

$$f(t) = F e^{j\omega t} \quad (1.4-25)$$

稳态位移响应为

$$x = X e^{j\omega t} \quad (1.4-26)$$

将上述二式代入振动方程(1.4-38),得

$$(K - \omega^2 M + j\omega C) X = F \quad (1.5-52)$$

或

$$X = H(\omega) F \quad (1.5-53)$$

式中,频响函数矩阵

$$H(\omega) = (K - \omega^2 M + j\omega C)^{-1} \quad (1.5-54)$$

为 $n \times n$ 阶复对称矩阵。

(2) 频响函数的模态展式

将坐标变换(1.5-42)代入状态方程(1.5-1),左乘 ψ'^T 并注意正交性式(1.5-19)、式(1.5-20),得解耦方程组

$$\text{diag}[a_i, a_i^*] \dot{y}' + \text{diag}[b_i, b_i^*] y' = \psi'^T f'(t) \quad (1.5-55)$$

设稳态响应

$$y' = \begin{bmatrix} U \\ V \end{bmatrix} e^{j\omega t} \quad (1.5-56)$$

式中 U 、 V 为 n 阶列阵。代入式(1.5-55)并考虑式(1.4-25),得

$$\text{diag}[j\omega a_i + b_i, j\omega a_i^* + b_i^*] \begin{bmatrix} U \\ V \end{bmatrix} = \Psi' \begin{bmatrix} F \\ 0 \end{bmatrix}$$

则

$$\begin{bmatrix} U \\ V \end{bmatrix} = \text{diag}\left[\frac{1}{j\omega a_i + b_i}, \frac{1}{j\omega a_i^* + b_i^*}\right] \Psi'^T \begin{bmatrix} F \\ 0 \end{bmatrix} \quad (1.5-57)$$

将式(1.4-26)、式(1.5-56)代入式(1.5-42)并考虑式(1.5-57),有

$$\begin{bmatrix} X \\ j\omega X \end{bmatrix} = \Psi' \begin{bmatrix} U \\ V \end{bmatrix} = \Psi' \text{diag}\left[\frac{1}{j\omega a_i + b_i}, \frac{1}{j\omega a_i^* + b_i^*}\right] \Psi'^T \begin{bmatrix} F \\ 0 \end{bmatrix}$$

从而

$$\begin{aligned} X &= \left(\Psi \text{diag}\left[\frac{1}{j\omega a_i + b_i}\right] \Psi^T + \Psi^* \text{diag}\left[\frac{1}{j\omega a_i^* + b_i^*}\right] \Psi^{*T} \right) F \\ &= \sum_{i=1}^n \left(\frac{\Psi_i \Psi_i^T}{j\omega a_i + b_i} + \frac{\Psi_i^* \Psi_i^{*T}}{j\omega a_i^* + b_i^*} \right) F \end{aligned} \quad (1.5-58)$$

与式(1.5-53)比较,得频响函数的模态展式

$$H(\omega) = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\Psi_i \Psi_i^T}{j\omega a_i + b_i} + \frac{\Psi_i^* \Psi_i^{*T}}{j\omega a_i^* + b_i^*} \right) \quad (1.5-59)$$

或写成

$$H(\omega) = \sum_{i=1}^n \left(\frac{1}{a_i} \cdot \frac{\Psi_i \Psi_i^T}{j\omega - \lambda_i} + \frac{1}{a_i^*} \cdot \frac{\Psi_i^* \Psi_i^{*T}}{j\omega - \lambda_i^*} \right) \quad (1.5-60)$$

3. 脉冲响应函数

对频响函数模态展式(1.5-60)作傅氏逆变换,得脉冲响应函数矩阵

$$h(t) = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\Psi_i \Psi_i^T}{a_i} e^{\lambda_i t} + \frac{\Psi_i^* \Psi_i^{*T}}{a_i^*} e^{\lambda_i^* t} \right) \quad (1.5-61)$$

为 $n \times n$ 阶实对称矩阵。

如果系统为粘性比例阻尼系统,则频响函数式(1.5-60)退化为式(1.4-62)。

1.5.2 一般结构阻尼系统

一般结构阻尼系统的振动微分方程

$$M\ddot{x} + (K + jG)x = F e^{j\omega t} \quad (1.4-65)$$

式中 G 为一般结构阻尼矩阵,正定或半正定实对称矩阵, $n \times n$ 阶。 G 不满足比例阻尼的条件式(1.4-66),故不能在模态坐标系中对角化。但由下面推证可以看出,复刚度矩阵 $(K + jG)$ 是可对角化的。由于结构阻尼系统的这一特性,使得不像粘性阻尼系统那样需在状态空间中描述,而是直接由坐标变换解耦振动方程(1.4-65)。

1. 特征值问题

(1) 特征值和特征矢量

令 $F = 0$,则式(1.4-65)对应的齐次方程为

$$M\ddot{x} + (K + jG)x = 0 \quad (1.5-62)$$

设特解

$$x = \psi e^{\lambda t} \quad (1.5-63)$$

代入式(1.5-62),得

$$(\lambda^2 \mathbf{M} + \mathbf{K} + j\mathbf{G})\boldsymbol{\psi} = \mathbf{0} \quad (1.5-64)$$

这是以 λ^2 为特征值、 $\boldsymbol{\psi}$ 为特征矢量的广义特征值问题。

特征方程

$$|\lambda^2 \mathbf{M} + \mathbf{K} + j\mathbf{G}| = 0 \quad (1.5-65)$$

可解得 n 个互异复特征值 $\lambda_i^2 (i=1, 2, \dots, n)$ 。

将 n 个特征值 λ_i^2 逐一代入式(1.5-64),得 n 个复特征矢量 $\boldsymbol{\psi}_i$,按列排列成复特征矢量矩阵(模态矩阵)

$$\boldsymbol{\Psi} = [\boldsymbol{\psi}_1 \quad \boldsymbol{\psi}_2 \quad \dots \quad \boldsymbol{\psi}_n] \quad (1.5-66)$$

(2)特征矢量的正交性

将两组特征对 $\lambda_i^2, \boldsymbol{\psi}_i, \lambda_k^2, \boldsymbol{\psi}_k$ 分别代入式(1.5-64),易得

$$\boldsymbol{\psi}_k^T \mathbf{M} \boldsymbol{\psi}_i = \begin{cases} 0 & i \neq k \\ m_{Dk} & i = k \end{cases} \quad (1.5-67)$$

$$\boldsymbol{\psi}_k^T (\mathbf{K} + j\mathbf{G}) \boldsymbol{\psi}_i = \begin{cases} 0 & i \neq k \\ k_{Dk} + jg_{Dk} & i = k \end{cases} \quad (1.5-68)$$

式中, m_{Dk} 为复数; k_{Dk}, g_{Dk} 均为实数。这三个量分别称为复特征质量、复特征刚度和复特征阻尼。这就是结构阻尼系统特征矢量的正交性。

式(1.5-67)、式(1.5-68)亦可写成矩阵形式

$$\boldsymbol{\Psi}^T \mathbf{M} \boldsymbol{\Psi} = \text{diag}[m_{Dk}] \quad (1.5-69)$$

$$\boldsymbol{\Psi}^T (\mathbf{K} + j\mathbf{G}) \boldsymbol{\Psi} = \text{diag}[k_{Dk} + jg_{Dk}] \quad (1.5-70)$$

将 $\lambda_i^2, \boldsymbol{\psi}_i$ 代入式(1.5-64),左乘 $\boldsymbol{\psi}_i^T$,考虑式(1.5-67)、式(1.5-68)得

$$\lambda_i^2 = -\frac{k_{Di}}{m_{Di}} - j\frac{g_{Di}}{m_{Di}} \quad (1.5-71)$$

定义复模态参数

$$\left. \begin{aligned} m_{mi} &= \boldsymbol{\psi}_i^H \mathbf{M} \boldsymbol{\psi}_i \\ k_{mi} &= \boldsymbol{\psi}_i^H \mathbf{K} \boldsymbol{\psi}_i \\ g_{mi} &= \boldsymbol{\psi}_i^H \mathbf{G} \boldsymbol{\psi}_i \\ \omega_{mi}^2 &= \frac{k_{mi}}{m_{mi}} \\ \eta_{mi} &= \frac{g_{mi}}{k_{mi}} \end{aligned} \right\} \quad (1.5-72)$$

$m_{mi}, k_{mi}, g_{mi}, \omega_{mi}, \eta_{mi}$ 分别称为结构阻尼系统的复模态质量、复模态刚度、复模态结构阻尼、复模态频率、复模态结构阻尼比。它们均为实数。

将 $\lambda_i^2, \boldsymbol{\psi}_i$ 代入式(1.5-64)并左乘 $\boldsymbol{\psi}_i^H$,则

$$\lambda_i^2 = -\frac{k_{mi}}{m_{mi}} - j\frac{g_{mi}}{m_{mi}} = -\omega_{mi}^2 (1 + j\eta_{mi}) \quad (1.5-73)$$

这就是结构阻尼系统特征值的物理意义。它反映了系统的固有特性。

2. 频响函数

(1) 频响函数矩阵

设稳态位移响应

$$\mathbf{x} = \mathbf{X}e^{j\omega t} \quad (1.4-26)$$

代入式(1.4-65), 得与结构比例阻尼系统相同的频响函数矩阵

$$\mathbf{H}(\omega) = (\mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M} + j\mathbf{G})^{-1} \quad (1.4-78)$$

(2) 频响函数的模态展式

上述求得的 n 个复特征矢量 $\boldsymbol{\psi}_i$ 构成一个复矢量空间的完备正交基。这一复矢量空间称为复模态空间或复模态坐标系。这一复模态坐标系与物理坐标系由变换

$$\mathbf{x} = \boldsymbol{\Psi} \mathbf{y} \quad (1.5-74)$$

相联系, \mathbf{y} 为 \mathbf{x} 在复模态坐标系中的坐标矢量, n 维。

将变换(1.5-74)代入式(1.4-65), 左乘 $\boldsymbol{\Psi}^T$ 并注意正交性式(1.5-69)、式(1.5-70), 得解耦方程组

$$\text{diag}[m_{Dk}] \ddot{\mathbf{y}} + \text{diag}[k_{Dk} + jg_{Dk}] \mathbf{y} = \boldsymbol{\Psi}^T \mathbf{F} e^{j\omega t} \quad (1.5-75)$$

设稳态位移响应

$$\mathbf{y} = \mathbf{U} e^{j\omega t} \quad (1.5-76)$$

代入式(1.5-75), 得

$$\text{diag}[k_{Dk} - \omega^2 m_{Dk} + jg_{Dk}] \mathbf{U} = \boldsymbol{\Psi}^T \mathbf{F}$$

则

$$\mathbf{U} = \text{diag}\left[\frac{1}{k_{Dk} - \omega^2 m_{Dk} + jg_{Dk}}\right] \boldsymbol{\Psi}^T \mathbf{F} \quad (1.5-77)$$

将式(1.4-26)、式(1.5-76)代入式(1.5-74)并注意式(1.5-77), 得

$$\mathbf{X} = \boldsymbol{\Psi} \mathbf{U} = \boldsymbol{\Psi} \text{diag}\left[\frac{1}{k_{Dk} - \omega^2 m_{Dk} + jg_{Dk}}\right] \boldsymbol{\Psi}^T \mathbf{F} \quad (1.5-78)$$

与式(1.4-77)比较, 得频响函数模态展式

$$\mathbf{H}(\omega) = \sum_{i=1}^n \frac{\boldsymbol{\psi}_i \boldsymbol{\psi}_i^T}{k_{Di} - \omega^2 m_{Di} + jg_{Di}} \quad (1.5-79)$$

利用式(1.5-71)~式(1.5-73), 上式可写成

$$\mathbf{H}(\omega) = \sum_{i=1}^n \frac{m_{mi}}{m_{Di}} \cdot \frac{\boldsymbol{\psi}_i \boldsymbol{\psi}_i^T}{k_{mi} - \omega^2 m_{mi} + jg_{mi}} \quad (1.5-80)$$

当为结构比例阻尼系统时, $m_{mi} = m_{Di} = m_i$, $k_{mi} = k_{Di} = k_i$, $g_{mi} = g_{Di} = g_i$, 上式退化为式(1.4-83)。

1.6 拉氏变换的方法

前述几节讨论了单自由度系统和多自由度系统的三种参数模型, 给出模态分析有关的基本概念和基本理论, 特别是频响函数的模态展式。不过, 在求频响函数表达式时均假设系统受简谐激励。

积分变换(傅氏变换、拉氏变换)是求系统频响函数的重要方法。只要系统激励和响应满

足积分变换的条件,就可以应用积分变换求频响函数。拉氏变换比傅氏变换成立的条件要低得多,并且,在 $t \geq 0$ 范围内,在虚数轴(频率轴)上的拉氏变换就是傅氏变换,而实际振动问题总是在 $t \geq 0$ 意义下存在的。所以,采用拉氏变换更具普遍性,也更方便。用拉氏变换直接得到的是复数域($s = \sigma + j\omega$)上的传递函数,只要令 $s = j\omega$,便得到虚数域(频率域)上的频响函数。

各种阻尼模型的振动系统均可用拉氏变换的方法求传递函数和频响函数,这里只以粘性阻尼系统为例进行讨论,给出传递函数和频响函数的另外两种重要形式——有理分式和留数展式。

1.6.1 单自由度系统

1. 传递函数与频响函数

具有粘性阻尼的单自由度系统振动微分方程

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = f(t) \quad (1.2-1)$$

如果初始条件为零,即 $x(0) = 0, \dot{x}(0) = 0$,对上述方程做拉氏变换,令 $X(s) = \mathcal{L}[x(t)]$, $F(s) = \mathcal{L}[f(t)]$ ($s = \sigma + j\omega$ 为复变量),则

$$(ms^2 + cs + k)X(s) = F(s) \quad (1.6-1)$$

写成

$$Z(s)X(s) = F(s) \quad (1.6-2)$$

或

$$X(s) = H(s)F(s) \quad (1.6-3)$$

式中

$$H(s) = \frac{1}{ms^2 + cs + k} \quad (1.6-4)$$

称为系统的传递函数。

$$Z(s) = H^{-1}(s) = ms^2 + cs + k \quad (1.6-5)$$

称为系统的阻抗。

如果 $s = j\omega$,上述过程将完全是傅氏变换过程,得到的传递函数为频响函数,即

$$H(s)|_{s=j\omega} = H(j\omega) = H(\omega) = \frac{1}{k - m\omega^2 + j\omega c} \quad (1.6-6)$$

这就是传递函数与频响函数的关系。

注意,上面假设初始条件为零。如果初始条件不为零,式(1.6-1)将包含初始条件,即 $X(s)$ 中包含初始条件引起的自由响应。由于阻尼的存在,这一自由响应将很快衰减掉, $X(s)$ 中只剩下稳态响应,所要求的传递函数或频响函数也是稳态响应下传递函数或频响函数。故在初始条件不为零时,所得稳态响应下的传递函数或频响函数仍如式(1.6-4)或式(1.6-6)。

2. 脉冲响应函数

设系统作用单位脉冲力 $\delta(t)$,脉冲响应函数为 $h(t)$ 。对其做拉氏变换, $\mathcal{L}[\delta(t)] = F(s) = 1$, $\mathcal{L}[h(t)] = X(s)$,代入式(1.6-3),得 $X(s) = H(s)$,即

$$H(s) = \mathcal{L}[h(t)] \quad (1.6-7)$$

可见,传递函数 $H(s)$ 与脉冲响应函数 $h(t)$ 是一拉氏变换对。

对式(1.6-4)做拉氏逆变换,得

$$h(t) = \mathcal{L}^{-1}[H(s)] = \frac{e^{-\sigma t}}{m\omega_d} \sin \omega_d t$$

式中

$$\sigma = \frac{c}{2m}, \omega_d = \sqrt{\omega_0^2 - \sigma^2}, \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

1.6.2 多自由度系统

具有粘性阻尼的多自由度系统振动微分方程为

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{x}} + \mathbf{K}\mathbf{x} = \mathbf{f}(t) \quad (1.4-38)$$

做初始条件为零的拉氏变换,得

$$(s^2 \mathbf{M} + s\mathbf{C} + \mathbf{K})\mathbf{X}(s) = \mathbf{F}(s) \quad (1.6-8)$$

可写成

$$\mathbf{Z}(s)\mathbf{X}(s) = \mathbf{F}(s) \quad (1.6-9)$$

式中阻抗矩阵

$$\mathbf{Z}(s) = s^2 \mathbf{M} + s\mathbf{C} + \mathbf{K} \quad (1.6-10)$$

1. 特征值问题

令 $\mathbf{F}(s) = \mathbf{0}$, 由式(1.6-9)得系统的特征值问题

$$\mathbf{Z}(s)\mathbf{X}(s) = \mathbf{0} \quad (1.6-11)$$

特征多项式

$$\Delta(s) = |\mathbf{Z}(s)| = \beta_0(1 + \beta_1 s + \cdots + \beta_{2n} s^{2n}) \quad (1.6-12)$$

特征方程

$$\Delta(s) = |\mathbf{Z}(s)| = 0 \quad (1.6-13)$$

它是关于 s 的 $2n$ 次实系数代数方程。解得 $2n$ 个共轭特征值为

$$\left. \begin{aligned} s_i &= -\sigma_{mi} + j\omega_{mdi} \\ s_i^* &= -\sigma_{mi} - j\omega_{mdi} \end{aligned} \right\} \quad (i=1, 2, \cdots, n) \quad (1.6-14)$$

式中 $\sigma_{mi} > 0, \omega_{mdi} > 0$ 。 s_i, s_i^* 即上节得到的复频率 λ_i, λ_i^* , 代入式(1.6-11), 得 $2n$ 个共轭特征矢量 $\boldsymbol{\psi}_i, \boldsymbol{\psi}_i^*$, 即系统的模态矢量。

2. 特征矢量的正交性

将两组特征对代入式(1.6-11), 经适当处理得与式(1.5-21)~(1.5-24)具有相同形式的正交性

$$\boldsymbol{\psi}_k^T[(s_i + s_k)\mathbf{M} + \mathbf{C}]\boldsymbol{\psi}_i = \begin{cases} 0 & i \neq k \\ a_i & i = k \end{cases} \quad (1.6-15)$$

$$\boldsymbol{\psi}_k^H[(s_i^* + s_k^*)\mathbf{M} + \mathbf{C}]\boldsymbol{\psi}_i^* = \begin{cases} 0 & i \neq k \\ a_i^* & i = k \end{cases} \quad (1.6-16)$$

$$\boldsymbol{\psi}_k^T(\mathbf{K} - s_i s_k \mathbf{M})\boldsymbol{\psi}_i = \begin{cases} 0 & i \neq k \\ b_i & i = k \end{cases} \quad (1.6-17)$$

$$\boldsymbol{\psi}_k^H(\mathbf{K} - s_i^* s_k^* \mathbf{M})\boldsymbol{\psi}_i^* = \begin{cases} 0 & i \neq k \\ b_i^* & i = k \end{cases} \quad (1.6-18)$$

$$s_i = -\frac{b_i}{a_i}, s_i^* = -\frac{b_i^*}{a_i^*} \quad (1.6-19)$$

$$(i=1, 2, \dots, n; k=1, 2, \dots, n)$$

3. 传递函数与频响函数矩阵

式(1.6-9)写成

$$\mathbf{X}(s) = \mathbf{H}(s)\mathbf{F}(s) \quad (1.6-20)$$

式中, 传递函数矩阵

$$\mathbf{H}(s) = (s^2\mathbf{M} + s\mathbf{C} + \mathbf{K})^{-1} \quad (1.6-21)$$

$$\mathbf{H}(s) = \mathbf{Z}^{-1}(s) \quad (1.6-22)$$

当 $s = j\omega$, 得频响函数矩阵

$$\mathbf{H}(\omega) = \mathbf{H}(s)|_{s=j\omega} = (\mathbf{K} - \omega^2\mathbf{M} + j\omega\mathbf{C})^{-1} \quad (1.6-23)$$

4. 传递函数与频响函数的有理分式与留数展式

式(1.6-22)可写为

$$\mathbf{H}(s) = \frac{\text{adj}\mathbf{Z}(s)}{|\mathbf{Z}(s)|} = \frac{\mathbf{N}(s)}{\Delta(s)} \quad (1.6-24)$$

式中, $\mathbf{N}(s) = \text{adj}\mathbf{Z}(s)$ 为阻抗矩阵 $\mathbf{Z}(s)$ 的伴随矩阵。其第 e 行第 f 列元素是 $\mathbf{Z}(s)$ 的第 f 行第 e 列元素 $Z_{fe}(s)$ 的代数余子式, 为 s 的 $2n-2$ 次多项式, 记为

$$N_{ef}(s) = \beta_0(\alpha_0 + \alpha_1 s + \dots + \alpha_{2n-2} s^{2n-2}) \quad (1.6-25)$$

$\mathbf{H}(s)$ 的任一元素为

$$H_{ef}(s) = \frac{N_{ef}(s)}{\Delta(s)} \quad (1.6-26)$$

将式(1.6-12)、式(1.6-25)代入式(1.6-26), 则

$$H_{ef}(s) = \frac{\alpha_0 + \alpha_1 s + \dots + \alpha_{2n-2} s^{2n-2}}{1 + \beta_1 s + \dots + \beta_{2n} s^{2n}} \quad (e, f=1, 2, \dots, n) \quad (1.6-27)$$

这是以 $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{2n-2}$ 和 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_{2n}$ 为参数的传递函数有理分式表达式。

考虑特征多项式可用特征值表示为

$$\Delta(s) = \beta_0 \beta_{2n} \prod_{i=1}^n (s - s_i)(s - s_i^*)$$

则式(1.6-26)又可写成

$$H_{ef}(s) = \frac{N_{ef}(s)}{\beta_0 \beta_{2n} \prod_{i=1}^n (s - s_i)(s - s_i^*)} = \sum_{i=1}^n \left(\frac{R_{efi}}{s - s_i} + \frac{R_{efi}^*}{s - s_i^*} \right) \quad (e, f=1, 2, \dots, n) \quad (1.6-28)$$

式中 s_i, s_i^* 称为 $H_{ef}(s)$ 的极点, R_{efi}, R_{efi}^* 称为 $H_{ef}(s)$ 在极点 s_i, s_i^* 处的留数。留数由下式求得, 即

$$R_{efi} = \lim_{s \rightarrow s_i} [H_{ef}(s)(s - s_i)] = \lim_{s \rightarrow s_i} \frac{N_{ef}(s)(s - s_i)}{\Delta(s)}$$

使用洛必达法则, 易求得

$$R_{efi} = \left. \frac{N_{ef}(s)}{\Delta'(s)} \right|_{s=s_i} \quad (1.6-29)$$

同理

$$R_{eff}^* = \left. \frac{N_{eff}(s)}{\Delta'(s)} \right|_{s=s_i^*} \quad (1.6-30)$$

式中 $\Delta'(s)$ 表示 $\Delta(s)$ 对 s 的导数。

式(1.6-28)为用留数表示的传递函数,写成矩阵形式为

$$\mathbf{H}(s) = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\mathbf{R}_i}{s-s_i} + \frac{\mathbf{R}_i^*}{s-s_i^*} \right) \quad (1.6-31)$$

此即传递函数的留数展式。式中 \mathbf{R}_i 、 \mathbf{R}_i^* 为对应系统第 i 阶模态的留数矩阵,由式(1.6-29)、式(1.6-30)可知,为复常数对称矩阵, $n \times n$ 阶。

令 $s = j\omega$, 由式(1.6-27)、式(1.6-28)、式(1.6-31)可得频响函数的有理分式和留数展式

$$H_{eff}(\omega) = \frac{\alpha_0 + \alpha_1(j\omega) + \cdots + \alpha_{2n-2}(j\omega)^{2n-2}}{1 + \beta_1(j\omega) + \cdots + \beta_{2n}(j\omega)^{2n}} \quad (1.6-32)$$

$$H_{eff}(\omega) = \sum_{i=1}^n \left(\frac{R_{effi}}{j\omega - s_i} + \frac{R_{effi}^*}{j\omega - s_i^*} \right) \quad (1.6-33)$$

$$\mathbf{H}(\omega) = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\mathbf{R}_i}{j\omega - s_i} + \frac{\mathbf{R}_i^*}{j\omega - s_i^*} \right) \quad (1.6-34)$$

5. 留数矩阵与复模态矢量的关系

用 $(s-s_i)\mathbf{Z}(s)$ 左乘式(1.6-31),利用式(1.6-22),得

$$(s-s_i)\mathbf{I} = (s-s_i)\mathbf{Z}(s) \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^n \frac{\mathbf{R}_k}{s-s_k} + \mathbf{Z}(s)\mathbf{R}_i$$

令 $s = s_i$, 则

$$\mathbf{Z}(s_i)\mathbf{R}_i = \mathbf{0} \quad (a)$$

将特征对 s_i 、 $\boldsymbol{\psi}_i$ 代入式(1.6-11),得

$$\mathbf{Z}(s_i)\boldsymbol{\psi}_i = \mathbf{0} \quad (b)$$

注意 \mathbf{R}_i 为对称矩阵,故 \mathbf{R}_i 可写成

$$\mathbf{R}_i = u_i \boldsymbol{\psi}_i \boldsymbol{\psi}_i^T \quad (c)$$

从而

$$\mathbf{R}_i^* = u_i^* \boldsymbol{\psi}_i^* \boldsymbol{\psi}_i^{*T} \quad (d)$$

将式(c)、(d)代入式(1.6-31),右乘 $\mathbf{Z}(s)\boldsymbol{\psi}_i$,得

$$\boldsymbol{\psi}_i = \sum_{k=1}^n \frac{u_k \boldsymbol{\psi}_k \boldsymbol{\psi}_k^T}{s-s_k} \mathbf{Z}(s) \boldsymbol{\psi}_i + \sum_{k=1}^n \frac{u_k^* \boldsymbol{\psi}_k^* \boldsymbol{\psi}_k^{*T}}{s-s_k^*} \mathbf{Z}(s) \boldsymbol{\psi}_i$$

令 $s = s_i$, 注意式(b),并应用洛必达法则,则上式成为

$$\boldsymbol{\psi}_i = u_i \boldsymbol{\psi}_i \boldsymbol{\psi}_i^T (2s_i \mathbf{M} + \mathbf{C}) \boldsymbol{\psi}_i$$

由式(1.6-15),上式为

$$\boldsymbol{\psi}_i = u_i \boldsymbol{\psi}_i a_i$$

所以

$$u_i = \frac{1}{a_i}, u_i' = -\frac{1}{a_i} \quad (e)$$

代入式(c)、(d),得

$$\mathbf{R}_i = \frac{1}{a_i} \boldsymbol{\psi}_i \boldsymbol{\psi}_i^T, \mathbf{R}_i^* = \frac{1}{a_i^*} \boldsymbol{\psi}_i^* \boldsymbol{\psi}_i^{*\top} \quad (1.6-35)$$

可见,频响函数的留数展式(1.6-34)与模态展式(1.5-60)完全一致。将(1.6-35)第一式展开得

$$\mathbf{R}_i = \frac{1}{a_i} \begin{bmatrix} \psi_{1i} \psi_{1i} & \psi_{1i} \psi_{2i} & \cdots & \psi_{1i} \psi_{ni} \\ \psi_{2i} \psi_{1i} & \psi_{2i} \psi_{2i} & \cdots & \psi_{2i} \psi_{ni} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \psi_{ni} \psi_{1i} & \psi_{ni} \psi_{2i} & \cdots & \psi_{ni} \psi_{ni} \end{bmatrix} \quad (1.6-36)$$

可见,留数矩阵 \mathbf{R}_i 每一行和每一列都包含第 i 阶模态矢量 $\boldsymbol{\psi}_i$,故留数矩阵是反映系统模态矢量的一种模态参数矩阵,求得了留数矩阵的一列(行)元素,也就求得了系统的模态矢量。

6. 脉冲响应函数

对传递函数矩阵式(1.6-31)做拉氏逆变换,得脉冲响应函数矩阵

$$\mathbf{h}(t) = \mathcal{L}^{-1}[\mathbf{H}(s)] = \sum_{i=1}^n (\mathbf{R}_i e^{s_i t} + \mathbf{R}_i^* e^{s_i^* t}) \quad (1.6-37)$$

其中第 e 行第 f 列的脉冲响应函数

$$h_{ef}(t) = \sum_{i=1}^n (R_{efi} e^{s_i t} + R_{efi}^* e^{s_i^* t}) \quad (1.6-38)$$

可见,系统的留数是构成脉冲响应函数各阶模态运动的复振幅。这是留数的物理意义,与式(1.6-36)反映的留数物理意义一致。

1.7 常用激励下的频响函数、频响函数与脉冲响应函数的物理意义

本节首先讨论简谐激励、周期激励、瞬态激励和随机激励作用下频响函数的具体定义,然后讨论非参数模型(频响函数与脉冲响应函数)的一般展式及物理意义。这些内容对系统识别具有重要意义。

1.7.1 常用激励下的频响函数

1. 简谐激励下的频响函数

前面已讨论过,在简谐激励下,系统的频响函数定义为系统稳态响应幅值与激励幅值之比,即

$$\mathbf{X} = \mathbf{H}(\omega) \mathbf{F} \quad (1.7-1)$$

式中 \mathbf{X} 、 \mathbf{F} 分别为稳态位移响应幅值列阵和激励幅值列阵。

2. 周期激励下的频响函数

设系统受到周期为 T 的周期激励 $f(t)$,稳态位移响应亦为周期为 T 的函数 $x(t)$,它们均满足狄氏条件,故可写成傅氏级数

$$\left. \begin{aligned} f(t) &= \sum_{r=-\infty}^{\infty} F(\omega_r) e^{j\omega_r t} \\ F(\omega_r) &= \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) e^{-j\omega_r t} dt \end{aligned} \right\} \quad (1.7-2)$$

$$\left. \begin{aligned} x(t) &= \sum_{r=-\infty}^{\infty} X(\omega_r) e^{j\omega_r t} \\ X(\omega_r) &= \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t) e^{-j\omega_r t} dt \end{aligned} \right\} \quad (1.7-3)$$

式中, $\omega_r = r\omega_1$, r 为正整数, $\omega_1 = \frac{2\pi}{T}$ 为基频。系统在周期激励下的频响函数定义为在各倍频点上稳态响应幅值与激励幅值之比, 即

$$X(\omega_r) = H(\omega_r) F(\omega_r) \quad (r=1, 2, \dots, \infty) \quad (1.7-4)$$

注意此时频响函数 $H(\omega_r)$ 为各倍频点 $\omega_r = r\omega_1$ 上的离散值, 不再是 ω 的连续函数。

3. 瞬态激励下的频响函数

设系统在瞬态激励 $f(t)$ 下的响应为 $x(t)$ 。它们一般也满足狄氏条件, 故可做傅氏变换

$$F(\omega) = \mathcal{F}[f(t)], X(\omega) = \mathcal{F}[x(t)]$$

则在瞬态激励下, 系统的频响函数定义为响应与激励傅氏变换之比, 即

$$X(\omega) = H(\omega) F(\omega) \quad (1.7-5)$$

4. 随机激励下的频响函数

系统在随机激励下的响应亦为随机的。它们一般不满足傅氏变换的狄氏条件, 故不能直接做傅氏变换得到频响函数, 而是通过谱密度函数定义频响函数。

假设单自由度系统的随机激励 $f(t)$ 和随机响应 $x(t)$ 都是平稳随机过程, 则其相关函数是时间延迟 τ 的与 t 无关的函数。

激励 $f(t)$ 的自相关函数定义为 $f(t)f(t+\tau)$ 的系集平均(总体平均)

$$R_{ff}(\tau) = E[f(t)f(t+\tau)] \quad (1.7-6)$$

它是 τ 的实偶函数, $R_{ff}(\tau) = R_{ff}(-\tau)$, 且在 $\tau=0$ 处有最大值。

激励 $f(t)$ 与响应 $x(t)$ 的互相关函数定义为 $f(t)x(t+\tau)$ 的系集平均

$$R_{fx}(\tau) = E[f(t)x(t+\tau)] \quad (1.7-7)$$

且 $R_{fx}(\tau) = R_{xf}(-\tau)$, 它是 τ 的实值函数。

相关函数从时域内描述了随机信号的特性。很多情况下, 使用描述随机信号频域特性的功率谱密度函数更加方便。

功率谱密度函数有着广泛的物理内涵, 它有三种定义方法。

(1) 第一种定义

功率谱密度函数定义为相关函数的傅氏变换。自相关函数的傅氏变换称为自功率谱密度函数, 简称自功率谱或自谱, 表达式为

$$S_{ff}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} R_{ff}(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau \quad (1.7-8)$$

互相关函数的傅氏变换称为互功率谱密度函数, 简称互功率谱或互谱, 表达式为

$$S_{fx}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} R_{fx}(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau \quad (1.7-9)$$

(2)第二种定义

理论上,一个平稳随机过程中的样本函数 $x(t)$ 定义在 $t \in (-\infty, \infty)$ 上,则 $x(t)$ 非绝对可积,即

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)| dt = \infty$$

从而不能得到 $x(t)$ 的傅氏变换。但在实际中,所有样本函数都是有限长的,即 $t \in \left[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}\right]$ 。T 为样本长度。因此可计算样本函数 $x(t)$ 的有限傅氏变换

$$X_T(\omega) = \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t) e^{-j\omega t} dt \quad (1.7-10)$$

这样,在有限傅氏变换意义下,可以讨论随机过程样本函数的傅氏谱,进而得到用有限傅氏变换表示的功率谱密度函数。设平稳随机激励和随机响应样本函数 $f(t)$ 、 $x(t)$ 的有限傅氏变换为 $F_T(\omega)$ 、 $X_T(\omega)$,针对这一样本函数的自谱和互谱定义为

$$\left. \begin{aligned} S_{ff}(\omega, T) &= \frac{1}{T} F_T^*(\omega) F_T(\omega) = \frac{1}{T} |F_T(\omega)|^2 \\ S_{xx}(\omega, T) &= \frac{1}{T} X_T^*(\omega) X_T(\omega) = \frac{1}{T} |X_T(\omega)|^2 \\ S_{fx}(\omega, T) &= \frac{1}{T} F_T^*(\omega) X_T(\omega) \end{aligned} \right\} \quad (1.7-11)$$

针对这两个随机过程的自谱和互谱为上述针对样本函数的自谱和互谱的数学期望(统计平均)

$$\left. \begin{aligned} \bar{S}_{ff}(\omega, T) &= E[S_{ff}(\omega, T)] = \frac{1}{T} E[|F_T(\omega)|^2] \\ \bar{S}_{xx}(\omega, T) &= E[S_{xx}(\omega, T)] = \frac{1}{T} E[|X_T(\omega)|^2] \\ \bar{S}_{fx}(\omega, T) &= E[S_{fx}(\omega, T)] = \frac{1}{T} E[F_T^*(\omega) X_T(\omega)] \end{aligned} \right\} \quad (1.7-12)$$

令 $T \rightarrow \infty$,得到与式(1.7-8)、式(1.7-9)相同的精确的功率谱密度函数

$$\left. \begin{aligned} S_{ff}(\omega) &= \lim_{T \rightarrow \infty} \bar{S}_{ff}(\omega, T) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} E[|F_T(\omega)|^2] \\ S_{xx}(\omega) &= \lim_{T \rightarrow \infty} \bar{S}_{xx}(\omega, T) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} E[|X_T(\omega)|^2] \\ S_{fx}(\omega) &= \lim_{T \rightarrow \infty} \bar{S}_{fx}(\omega, T) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} E[F_T^*(\omega) X_T(\omega)] \end{aligned} \right\} \quad (1.7-13)$$

式(1.7-12)是式(1.7-13)的近似,但这种近似具有重要的实际意义。基于快速傅氏变换(FFT)方法,很容易由式(1.7-12)求得离散的功率谱密度函数。

由式(1.7-13)知功率谱密度函数具有如下性质:

$$\begin{aligned} S_{xx}(\omega) &= S_{xx}(-\omega) \\ S_{fx}(\omega) &= S_{xf}^*(\omega) \end{aligned}$$

自谱为实偶函数,互谱为复函数。

(3)第三种定义

帕塞瓦尔定理直接给出了功率谱密度函数的定义。这一定理为,信号按时域计算的平均功率等于按频域计算的平均功率。平稳随机过程中一样本函数 $x(t)$ 的平均功率

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x^2(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} S_{xx}(f, k) df \quad (1.7-14)$$

即 $S_{xx}(f, k)$ 曲线与频率轴之间的面积表示信号的平均功率。单位频率上的平均功率即功率谱密度函数 $S_{xx}(f, k)$ 。 k 表示样本号。

同理,样本函数 $x(t)$ 、 $f(t)$ 的互谱由下式定义。

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)x(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} S_{fx}(f, k) df \quad (1.7-15)$$

如果是各态历过程,上述 $S_{xx}(f, k)$ 、 $S_{fx}(f, k)$ 就是随机过程的自谱和互谱。如果是一般平稳随机过程,尚需对式(1.7-14)、式(1.7-15)作集合平均

$$E[x^2(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} E[S_{xx}(f, k)] df = \int_{-\infty}^{\infty} S_{xx}(f) df \quad (1.7-16)$$

$$E[f(t)x(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} E[S_{fx}(f, k)] df = \int_{-\infty}^{\infty} S_{fx}(f) df \quad (1.7-17)$$

第三种定义适于模拟滤波器求功率谱密度函数,具体步骤如下。令一随机过程中一个样本信号 $x(t)$ 通过中心频率为 f 、带宽为 Δf 的带通滤波器,滤波后的信号为 $x(t, f, \Delta f)$,求均方值并考虑帕塞瓦尔定理,有

$$\bar{\psi}_x^2(f, \Delta f, T) = \frac{1}{T} \int_0^T x^2(t, f, \Delta f) dt = \bar{G}_{xx}(f, k, \Delta f, T) \Delta f \quad (1.7-18)$$

则

$$\begin{aligned} G_{xx}(f, k) &= \lim_{\substack{\Delta f \rightarrow 0 \\ T \rightarrow \infty}} \bar{G}_{xx}(f, k, \Delta f, T) \\ &= \lim_{\Delta f \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta f} \left[\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T x^2(t, f, \Delta f) dt \right] \end{aligned} \quad (1.7-19)$$

对一般平稳随机过程有

$$G_{xx}(f) = E[G_{xx}(f, k)] = \lim_{\Delta f \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta f} \left[\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T E[x^2(t, f, \Delta f)] dt \right] \quad (1.7-20)$$

事实上,式(1.7-18)对 Δf 求和并令 $\Delta f \rightarrow 0$ 、 $T \rightarrow \infty$,再作集合平均

$$E[x^2(t)] = \int_0^{\infty} G_{xx}(f) df \quad (1.7-21)$$

对比式(1.7-16),注意 $S_{xx}(f) = S_{xx}(-f)$,得

$$G_{xx}(f) = 2S_{xx}(f) \quad f \in [0, \infty] \quad (1.7-22)$$

$G_{xx}(f)$ 称为单边功率谱, $S_{xx}(f)$ 称为双边功率谱。由模拟滤波法得到的功率谱为单边功率谱。

用模拟滤波法也可得到两个随机过程的互谱,并且规定

$$G_{fx}(f) = 2S_{fx}(f) \quad (1.7-23)$$

上述三种定义功率谱密度函数的方法各有不同用处。第一种定义给出功率谱密度函数与相关函数的关系,二者可通过傅氏变换互相求出;第二种定义是数字信号处理的重要基础;第

三种定义给出了功率谱密度函数的物理含义。其中第二种定义最为重要。

设多自由度振动系统在稳态随机激励 $f(t)$ 作用下的稳态随机响应为 $x(t)$, 均为平稳随机过程。对其样本函数作有限傅氏变换, 记为 $F_f(\omega)$ 、 $X_f(\omega)$, 则

$$X_f(\omega) = H(\omega) F_f(\omega) \quad (1.7-24)$$

两端右乘 $F_f^H(\omega)$, 取时间平均及集合平均, 并注意 $H(\omega)$ 与平均无关, 则

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} E[X_f(\omega) F_f^H(\omega)] = H(\omega) \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} E[F_f(\omega) F_f^H(\omega)]$$

即

$$S_{fx}(\omega) = H(\omega) S_{ff}(\omega) \quad (1.7-25)$$

或用单边功率谱表示为

$$G_{fx}(\omega) = H(\omega) G_{ff}(\omega) \quad (1.7-26)$$

式中互谱矩阵 $G_{fx}(\omega)$ 和自谱矩阵 $G_{ff}(\omega)$ 为

$$G_{fx}(\omega) = \begin{bmatrix} G_{f1x1}(\omega) & G_{f2x1}(\omega) & \cdots & G_{fnx1}(\omega) \\ G_{f1x2}(\omega) & G_{f2x2}(\omega) & \cdots & G_{fnx2}(\omega) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ G_{f1xn}(\omega) & G_{f2xn}(\omega) & \cdots & G_{fnxn}(\omega) \end{bmatrix} \quad (1.7-27)$$

$$G_{ff}(\omega) = \begin{bmatrix} G_{f1f1}(\omega) & G_{f2f1}(\omega) & \cdots & G_{fnf1}(\omega) \\ G_{f1f2}(\omega) & G_{f2f2}(\omega) & \cdots & G_{fnf2}(\omega) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ G_{f1fn}(\omega) & G_{f2fn}(\omega) & \cdots & G_{fnfn}(\omega) \end{bmatrix} \quad (1.7-28)$$

如果 $G_{ff}(\omega)$ 非奇异, 由式(1.7-26)可求得系统频响函数矩阵

$$H(\omega) = G_{fx}(\omega) G_{ff}^{-1}(\omega) \quad (1.7-29)$$

特别地, 当 n 个激励线性无关时, $G_{ff}(\omega)$ 非对角线元素均为 0, 则

$$H(\omega) = G_{fx}(\omega) \text{diag}[G_{fn}(\omega)] \quad (1.7-30)$$

$H(\omega)$ 中任一元素

$$H_{kl}(\omega) = \frac{G_{fkxl}}{G_{fkfk}} \quad (1.7-31)$$

式中, G_{fkxl} 表示 k 坐标激励、 l 坐标响应之间的互谱; G_{fkfk} 表示 k 坐标激励的自谱。

若对式(1.7-24)右乘 $X_f^H(\omega)$, 取时间平均及集合平均, 得

$$G_{xx}(\omega) = H(\omega) G_{xf}(\omega) \quad (1.7-32)$$

若对式(1.7-24)取共轭转置, 则

$$X_f^H(\omega) = F_f^H(\omega) H^H(\omega) \quad (1.7-33)$$

式(1.7-24)和式(1.7-33)二式相乘, 取时间平均及集合平均, 得

$$G_{xx}(\omega) = H(\omega) G_{ff}(\omega) H^H(\omega) \quad (1.7-34)$$

特别地, 若 n 个输入互不相关, 则 $G_{ff}(\omega)$ 为对角矩阵, 记为 $\text{diag}[G_{ff\beta}(\omega)]$, 则式(1.7-34)为

$$G_{xx}(\omega) = H(\omega) \text{diag}[G_{ff\beta}(\omega)] H^H(\omega) \quad (1.7-35)$$

式(1.7-26)或式(1.7-29)、式(1.7-32)、式(1.7-34)给出了随机激励下频响函数的三

种定义方式,它们是 MIMO 频域识别的基础。如果是 SISO,由上述三式得到频响函数的三种估算形式为

$$H_1(\omega) = \frac{G_{yy}(\omega)}{G_{ff}(\omega)} \quad (1.7-36)$$

$$H_2(\omega) = \frac{G_{yx}(\omega)}{G_{xx}(\omega)} \quad (1.7-37)$$

$$|H_d(\omega)|^2 = \frac{G_{yy}(\omega)}{G_{ff}(\omega)} \quad (1.7-38)$$

事实上,本段讨论的由功率谱密度函数求频响函数的方法具有更普遍的实用意义。由于使用功率谱密度函数时用到集合平均,故可最大程度地消除噪声影响,比直接由傅氏变换求得的频响函数更精确。

1.7.2 传递函数和频响函数的物理意义

前面几节求得了多自由度系统频响函数的矩阵形式、模态展式和留数展式。为了使用频响函数估算模态参数,这里进一步讨论它们的物理意义。

将式(1.6-20)写成矩阵形式

$$\begin{bmatrix} X_1(s) \\ X_2(s) \\ \vdots \\ X_n(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H_{11}(s) & H_{12}(s) & \cdots & H_{1n}(s) \\ H_{21}(s) & H_{22}(s) & \cdots & H_{2n}(s) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ H_{n1}(s) & H_{n2}(s) & \cdots & H_{nn}(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_1(s) \\ F_2(s) \\ \vdots \\ F_n(s) \end{bmatrix} \quad (1.7-39)$$

$\mathbf{X}(s)$ 中的任一元素

$$X_e(s) = \sum_{f=1}^n H_{ef}(s) F_f(s) \quad (e=1,2,\cdots,n) \quad (1.7-40)$$

如果仅在第 e 个物理坐标上施加激励,其他坐标激励为零,则该物理坐标上的响应为

$$X_e(s) = H_{ee}(s) F_e(s)$$

从而

$$H_{ee}(s) = \frac{X_e(s)}{F_e(s)} \quad (e=1,2,\cdots,n) \quad (1.7-41)$$

可见, $\mathbf{H}(s)$ 中对角元素 $H_{ee}(s)$ 表示仅在第 e 个物理坐标上施加单位激励,引起该坐标的位移响应。 $H_{ee}(s)$ 称为第 e 个物理坐标上的原点传递函数或驱动点传递函数。

如果仅在第 f 个物理坐标上施加激励,其他坐标上的激励为零,由式(1.7-40),第 e 个物理坐标上的位移响应为

$$X_e(s) = H_{ef}(s) F_f(s)$$

则

$$H_{ef}(s) = \frac{X_e(s)}{F_f(s)} \quad (e, f=1,2,\cdots,n \quad e \neq f) \quad (1.7-42)$$

可见, $\mathbf{H}(s)$ 中非对角元素 $H_{ef}(s)$ 表示仅在第 f 个物理坐标上施加单位激励,引起第 e 个物理坐标的位移响应。 $H_{ef}(s)$ 称为第 e 、 f 物理坐标之间的跨点传递函数。

在式(1.7-41)、式(1.7-42)中令 $s = j\omega$,则得原点(驱动点)频响函数 $H_{ee}(\omega)$ 和跨点频

响函数 $H_{ef}(\omega)$, 分别为

$$\left. \begin{aligned} H_{ee}(\omega) &= \frac{X_e(\omega)}{F_e(\omega)} \\ H_{ef}(\omega) &= \frac{X_e(\omega)}{F_f(\omega)} \end{aligned} \right\} (e, f = 1, 2, \dots, n) \quad (1.7-43)$$

式中, $X_e(\omega)$ 、 $F_e(\omega)$ 、 $F_f(\omega)$ 分别代表傅氏谱。

原点频响函数与跨点频响函数的各种特征图形有本质的区别。图 1.7-1 表示实测结构某原点频响函数对数幅频、虚频、实频和相频特性。

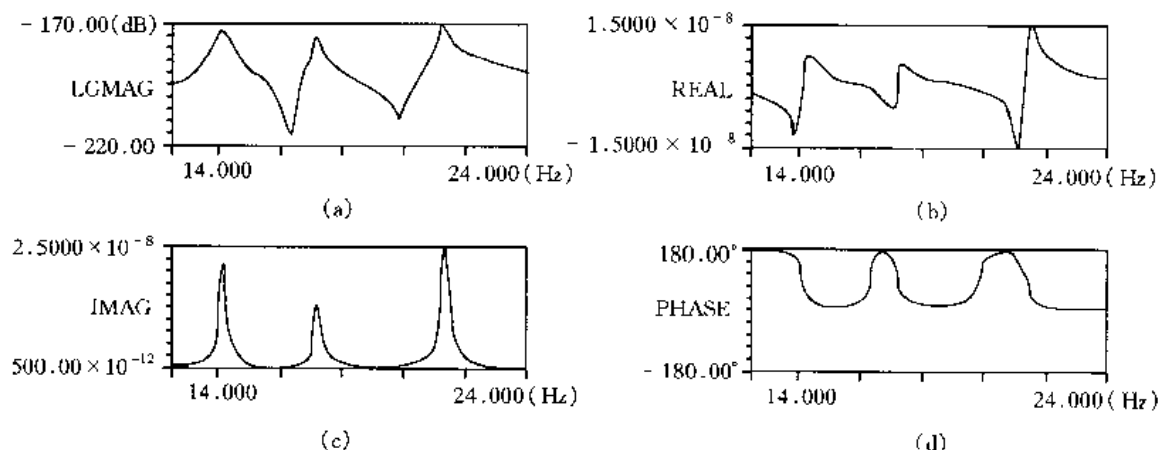


图 1.7-1 原点频响函数特征曲线

(a) 幅频特性(对数); (b) 实频特性; (c) 虚频特性; (d) 相频特性

原点频响函数各种曲线具有下述特征:

- ① 在幅频图中, 每两个谐振峰之间必有一个反谐振点, 该点是相邻模态质量线和刚度线的交点;
- ② 在虚频图中, 所有峰均出现在频率轴的同侧, 亦即同相位;
- ③ 在相频图中, 每经过一个谐振点相位角滞后 180° , 每经过一个反谐振点相位角超前 180° 。

图 1.7-2 表示实测结构某两点之间跨点频响函数的各种特征曲线。

跨点频响函数各种特征曲线具有如下特征:

- ① 在幅频图中, 若相邻模态同相位, 在这两个模态之间存在一个反共振点, 若相邻模态反相位, 其质量线与刚度线不会抵消, 这两个模态之间将出现一段平滑曲线;
- ② 在虚频图中, 各模态峰值不在频率轴的同侧。

现讨论频响函数模态展式和留数展式的物理意义。

对于实模态系统(如粘性比例阻尼系统), 将模态展式(1.4-62)展成

$$\begin{bmatrix} H_{11}(\omega) & H_{12}(\omega) & \cdots & H_{1n}(\omega) \\ H_{21}(\omega) & H_{22}(\omega) & \cdots & H_{2n}(\omega) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ H_{n1}(\omega) & H_{n2}(\omega) & \cdots & H_{nn}(\omega) \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{k_i - \omega^2 m_i + j\omega c_i} \begin{bmatrix} \varphi_{1i} \varphi_{1i} & \varphi_{1i} \varphi_{2i} & \cdots & \varphi_{1i} \varphi_{ni} \\ \varphi_{2i} \varphi_{1i} & \varphi_{2i} \varphi_{2i} & \cdots & \varphi_{2i} \varphi_{ni} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \varphi_{ni} \varphi_{1i} & \varphi_{ni} \varphi_{2i} & \cdots & \varphi_{ni} \varphi_{ni} \end{bmatrix} \quad (1.7-44)$$

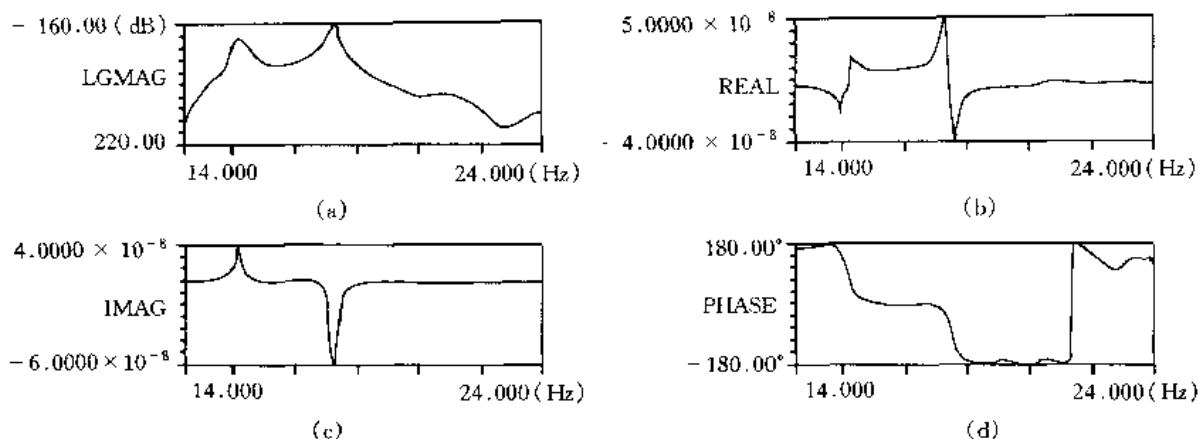


图 1.7-2 跨点频响应函数特征曲线

(a)幅频特性(对数);(b)实频特性;(c)虚频特性;(d)相频特性

由此可见,频响应函数矩阵每个元素都包含着该振动系统的各阶模态参数 m_i 、 k_i 、 c_i 或 ω_{0i} 、 ζ_i , 所以用频域法识别这些模态参数时,理论上只需频响应函数矩阵中一个元素即可;而频响应函数矩阵每一行或每一列都包含着该振动系统各阶模态矢量 ϕ_i 。所以,用频域法识别系统的模态矢量,至少要使用频响应函数矩阵的一列或一行元素。事实上,如果采用 SISO 识别法,则只使用频响应函数一行或一列元素识别系统全部模态参数;如果采用 MIMO 识别法,需先求出频响应函数矩阵的多列或多行元素。

对于复模态系统,也有上述结论。

1.7.3 脉冲响应函数的物理意义

由原点频响应函数和跨点频响应函数的概念,马上得到原点脉冲响应函数 $h_{ee}(t)$ 和跨点脉冲响应函数 $h_{ef}(t)$ 的物理意义。 $h_{ee}(t)$ 指仅在第 e 个物理坐标上作用单位脉冲力,引起该坐标的位移脉冲响应; $h_{ef}(t)$ 指仅在第 f 个物理坐标上作用单位脉冲力,引起第 e 个物理坐标的位移脉冲响应。

以粘性比例阻尼系统为例。将脉冲响应函数矩阵(1.4-64)展成

$$\begin{bmatrix} h_{11}(t) & h_{12}(t) & \cdots & h_{1n}(t) \\ h_{21}(t) & h_{22}(t) & \cdots & h_{2n}(t) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ h_{n1}(t) & h_{n2}(t) & \cdots & h_{nn}(t) \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^n \frac{e^{-\zeta_i t} \sin \omega_{di} t}{m_i \omega_{di}} \begin{bmatrix} \varphi_{1i} \varphi_{1i} & \varphi_{1i} \varphi_{2i} & \cdots & \varphi_{1i} \varphi_{ni} \\ \varphi_{2i} \varphi_{1i} & \varphi_{2i} \varphi_{2i} & \cdots & \varphi_{2i} \varphi_{ni} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \varphi_{ni} \varphi_{1i} & \varphi_{ni} \varphi_{2i} & \cdots & \varphi_{ni} \varphi_{ni} \end{bmatrix} \quad (1.7-45)$$

可见,脉冲响应函数矩阵任一行或一列元素中也包含着振动系统的全部模态信息。

若写出一般粘性阻尼系统脉冲响应函数矩阵 $h(t)$ 的留数展式(1.6-37)的展开式,亦可得到同样结论。

思 考 题

1. 单自由度振动系统的频响应函数如何定义? 频响应函数和单位脉冲响应函数有何关系? 二者都反映了振动系统的什么特性?

2. 频响函数有哪三种类型? 三者关系如何? (写出表达式)
3. 频响函数可以有基本表达式、极坐标表达式、直角坐标表达式, 因此可以有幅频特性、相频特性、实频特性、虚频特性、矢端图(Nyquist 图)、Bode 图等各种表达方法。试就结构阻尼系统写出上述各种公式表达式, 画出曲线, 并说明曲线特征(极值点、半功率点、零点、刚度线、质量线等)。
4. 对粘性阻尼系统, 使用速度矢端图较位移矢端图更方便, 为什么?
5. 单自由度粘性阻尼系统中无阻尼固有频率(ω_0)、有阻尼固有频率(特征值频率)(ω_d)和位移谐振频率(ω_D)三者大小关系如何?
6. 小阻尼时, 结构阻尼比 η 与粘性阻尼比 ζ 的关系如何?
7. 正确理解粘性阻尼模型与结构阻尼模型的含义。为什么说结构阻尼系统一般只能求解特征值问题, 不能求解自由振动响应?
8. 什么叫实模态分析? 它有哪些情形?
9. 模态参数有哪几个? 常关心哪几个模态参数?
10. 为什么说模态质量、模态刚度的数值大小没有直接意义?
11. 实模态振动系统以某阶振型振动时, 能够保持其振动形态。为什么?
12. 无阻尼振动系统的频响函数矩阵为 $\mathbf{H}(\omega) = (\mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M})^{-1}$, 特征方程 $|\mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M}| = 0$ 。这两式似乎矛盾, 如何解释?
13. 粘性比例阻尼如何定义?
14. 粘性比例阻尼系统共有 $2n$ 个特征值(复频率)。为什么独立的特征矢量只有 n 个, 且与无阻尼振动系统的特征矢量相同?
15. 实模态系统的频响函数矩阵与模态矢量有何关系?
16. 什么叫复模态分析? 复模态分析有哪些情形?
17. 复模态振动系统与实模态振动系统有何本质区别?
18. 试由粘性阻尼系统振动微分方程 $\mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{x}} + \mathbf{K}\mathbf{x} = \mathbf{f}$ 构造状态空间方程。
19. 粘性阻尼系统的特征根有 $2n$ 个, 特征矢量也有 $2n$ 个, 且均为 $2n \times 1$ 阶, 为什么频响函数矩阵 $\mathbf{H}(\omega)$ 仍为 $n \times n$ 阶矩阵?
20. 复模态系统不具有振型保持性, 即其振型节点(或节线)是变化的, 如何理解?
21. 结构阻尼系统运动微分方程可以直接解耦, 为何仍为复模态系统?
22. 复模态振动系统特征值问题有 $2n$ 个共轭特征根, 为何有意义的特征矢量只有 n 个?
23. 实模态分析法、复模态分析法只适用于何种激励情形?
24. 实模态系统与复模态系统有何关系?
25. 拉氏变换求传递函数(频响函数)的方法有何优点?
26. 试由振动微分方程推导由拉氏变换表达的方程。
27. 传递函数与频响函数有何关系? 传递函数与脉冲响应函数有何关系? 传递函数矩阵与阻抗矩阵有何关系?
28. 留数的物理意义是什么? 如何求留数?
29. 留数矩阵与复模态矩阵有何关系? 以此说明留数矩阵也是反映系统固有特性的量。
30. 写出用拉氏变换法求传递函数的过程。(提示: 求特征值 \rightarrow 求留数 \rightarrow 求传递函数)
31. 写出频响函数和传递函数的有理分式和留数展式。
32. 不同激励下传递函数(频响函数)的定义如何?
33. 激励不同, 传递函数(频响函数)的表达式不同; 传递函数(频响函数)是与激励无关的量。这两种说法似乎矛盾, 如何理解?
34. 什么是原点(驱动点)传递函数(频响函数)和跨点传递函数(频响函数)?
35. 从传递函数(频响函数)的一般展式中, 如何理解传递函数(频响函数)矩阵每一个元素中都包含了各阶模

态频率和模态阻尼? 因此, 只要测得任一元素, 即可识别各阶模态频率和模态阻尼。

36. 从传递函数(频响函数)一般展式中, 如何理解传递函数(频响函数)矩阵每一列或每一行中都包含了各阶模态矢量? 因而, 只要测得每一列或每一行元素, 即可识别各阶模态矢量。

第 2 章 时间历程的测量

2.1 引言

进行实验模态分析的第一步,是获得被测结构激励和响应的时域信号,即时间历程。如果后面采用频域法作参数识别,则必须获得上述两种时间历程信号。如果是采用时域法作参数识别,有时只需(有些情况下也只能)获得响应的时域信号。

获得振动结构所受激励和振动响应的时域信号是振动测试技术的基本内容。模态实验是一类特殊的振动测试技术,实验过程有许多特殊之处。因此,本章在介绍时间历程测量基本技术的基础上重点讨论与模态实验有关的测试技术。

对一个确定的实验对象,一般的振动测试系统由以下三部分组成:

- ①激振部分,包括信号源、功率放大器、激振装置;
- ②拾振部分,包括力传感器、响应传感器、适调放大器;
- ③分析、显示、记录部分,包括各种分析仪及其外围设备(显示、记录仪器等)。

如果进行模态实验分析,上述三部分可更详细地叙述如下:

- ①将试验结构以适当方式支撑起来;
- ②选择适当方式激励试验结构,通过拾振系统测量、记录激励和响应的时域信号(后面采用时域法时往往只需记录响应的时域信号);
- ③将记录到的激励和响应时域信号送入 A/D(模/数)转换器,将连续的模拟信号转换为离散的数字信号(采用计算机记录时域信号时,将此步并入②);
- ④如果采用频域法进行参数识别,需把上述时域数字信号进行快速傅氏变换(FFT)转换为傅氏谱,通过一定的数字信号处理方法获得系统的离散频响函数;
- ⑤根据离散频响函数或时域信号进行参数识别,估算出系统的模态参数或物理参数;
- ⑥显示、打印上述模态实验结果。

上面①、②即本章介绍的时间历程测量;③、④即第 3 章介绍的动态测试后处理;⑤、⑥即参数识别,其中频域法在第 4 章介绍,时域法第 5 章中介绍。

2.2 试验结构的支撑方式

试验结构分为原型和模型两种。对于已有的不很特殊的结构,可采用试验原型。对图纸阶段的结构或特殊结构,如超大、超重或超小、超轻结构,只能采用模型试验。采用试验模型时,需要根据相似理论制作模型,不仅考虑几何相似,还要考虑动力相似。

不管是原型试验还是模型试验,试验结构边界条件都是要考虑的重要因素,不同边界条件的结构特性可能完全不同。如一个自由梁与一个悬臂梁或简支梁的振动特性完全不同。因

此,必须要正确模拟被测结构的边界条件。

从力学意义上考虑,边界条件可分为几何边界条件、力边界条件、运动边界条件等等。在模态实验中,对系统固有特性影响最大的是几何边界条件,也即试验结构的支撑条件。支撑条件一般有自由支撑、固定支撑和原装支撑。

如果被测结构是完整的,则模态试验中的边界条件也应是完整的,即应以模拟结构实际工作状态为原则。如果采用模态综合法将被测结构分为子结构来进行模态试验,则边界条件应以模态综合法的要求确定。

2.2.1 自由支撑

有些振动结构的工作状态为自由状态,如空中飞行的飞机、火箭、导弹、卫星等。这类结构在做整体模型试验时,要求具有自由边界条件。

事实上,很难达到完全自由的约束状态。为此,采用的支撑应尽量柔软,即具有较低的支撑刚度和阻尼。这样的支撑称为自由支撑。经常采用的方式有橡皮绳悬挂、弹簧悬挂、气垫支撑、空气弹簧支撑、螺旋弹簧支撑等等。采用自由支撑后,相当于给结构增加了柔软约束,刚体模态频率不再为零,弹性模态也会受到影响。但由于自由支撑的刚度、阻尼较小,结构的弹性模态不会受到很大影响。比如刚体模态最高频率占到结构最低弹性模态固有频率的 $1/3$ 时,自由支撑对结构最低弹性模态固有频率的影响只有 1% ,故自由支撑一般能达到较好的效果。如果将自由支撑点选在结构上关心模态的节点附近,并使支撑体系与该阶模态主振动方向正交,则自由支撑对该阶模态的影响将达到最理想的效果。

有些边界条件非完全自由而受弱约束的结构也可以采用自由支撑。如汽车、摩托车、自行车、轮船等,所受的约束相对结构自身刚度来说仍小得多。这类结构采用自由支撑也是适当的。运用模态综合法研究子结构模态特性时,经常采用自由支撑。

2.2.2 固定支撑

固定支撑用于结构承受刚性约束的情形,故又称刚性支撑,如高层建筑、大坝的模型试验需采用固定支撑。许多具有刚性基础的机械结构也应采用刚性支撑。

固定支撑要求支撑具有较大的刚度和质量,才能减少对结构高阶模态的影响。一般以实测支撑系统的最低固有频率大于所关心的结构最高固有频率的 3 倍为参考标准。

运用模态综合法研究子结构模态特性时,有时也采用固定支撑。

2.2.3 原装支撑

原装支撑是广泛应用的一种支撑方式。事实上,自由支撑和固定支撑都是原装支撑的特殊情况。对完整结构来说,原装支撑是最优边界模拟。

在现场模态试验中,实际安装中的结构原型便具有最优原装支撑,无需做任何变动。在实验室实验中,则要尽量模拟现场的安装条件。对某些放置于地面上的结构(如各种车辆),在实验室进行模态试验时,完全可以自由地置于地面上进行测试,这类结构自身的支撑系统已做到较好地模拟实际边界条件。

另外指出,大多数模态实验是在静态下进行的,即被测结构处于静态。有些结构在静、动态下的特性相差较多。如具有滑动轴承的转子,欲获得结构在动态下的固有特性,应在运行状

态下进行模态实验。如果结构静、动态特性的差异只由边界条件决定,亦可在静态下模拟动态边界条件,但往往是困难的。

以上三种支撑方式并无优劣之分,而是视具体问题而定。对完整结构而言,事实上应尽量做到“原装”支撑。

2.3 激励方式

在模态实验中,不同的参数识别方法对频响函数测试的要求不同,因而所选激励方式也不同。一般来讲,激励方式有单点激励、多点激励和单点分区激励。

2.3.1 单点激励

单点激励是最简单、最常用的激励方式。所谓单点激励,是指对测试结构一次只激励一个点的一个方向,而在其他任何坐标上均没有激励作用。单点激励是 SISO 参数识别所要求的激励方式。

单点激励方式之所以有效,是建立在振动系统的可控性和可观性假设基础上的。所谓振动系统的可控性,是指对选择的点施加激励,能激发出系统的各阶模态。理论上讲,只要激励点不在各阶模态振型的节点上,且具备足够的能量,就可以激发出系统的各阶模态。所谓振动系统的可观性,是指测量出的各响应点的输出信号中包含各阶模态的信息。对线性时不变系统,可观性总是满足的。具备了可控性和可观性,系统才可辨识。

按照对频响函数矩阵模态展式(1.7-44)的分析,要获得系统的各阶模态频率、模态质量、模态刚度和模态阻尼,只需要频响函数矩阵中任意一个元素即可;而要获得一组完整的模态振型,必须求出频响函数矩阵中的一列或一行元素。

由式(1.7-43)频响函数的物理意义可知,激励一点 f 、测量各点 e 的响应,可得到频响函数矩阵的一列元素

$$H_{ef}(\omega) = \frac{X_e(\omega)}{F_f(\omega)} \quad (f \text{ 固定}, e = 1, 2, \dots, n) \quad (2.3-1)$$

相反,激励各测点 f ,只测量一点 e 的响应,可得到频响函数矩阵的一行元素

$$H_{ef}(\omega) = \frac{X_e(\omega)}{F_f(\omega)} \quad (e \text{ 固定}, f = 1, 2, \dots, n) \quad (2.3-2)$$

对中小型结构的模态分析,采用单点激励即可获得满意效果。然而,对大型、复杂结构,单点激励往往丢失模态,或由于激励能量有限而得不到有效的高信噪比频响函数,有时甚至无法激起结构的整体振动,导致模态实验彻底失败。因此,必须寻找另外的激励方式。

2.3.2 多点激励

多点激励是指对多个点同时施加激振力的激励方式。显然,输入系统的激励能量会成倍增加,同时,也增加了激振的复杂性。

多点激励方式是与相应的 MIMO 参数识别技术共同发展的。早在 40 年代,就有人提出了所谓的适调多点激振法,并首先在航空工业中应用。其思想是基于相位共振原理,合适调节各同频率稳态正弦激振力的幅值、相位(同相或反相)和频率,并使这些激振力正好抵消该阶模

态阻尼力,达到相位共振状态,从而激发出该阶模态的无阻尼振型(纯模态或固有模态),通过实测而不是分析得到该阶模态的各种模态参数。该方法要求激振力的个数等于系统的自由度。后来陆续有人对此方法进行了改进,包括使用计算机自动控制,效率大大提高。即使如此,该方法仍然十分复杂,需要丰富经验和相当长的测试时间,因而,这种方法使用并不普遍。

自 80 年代初发展起来的较有效的多点激励方式有多点随机激励和多点全相干激励。

多点随机激励使用的激励信号为随机信号,用此方法获得频响函数的理论基础是式(1.7-29)、式(1.7-32)和式(1.7-34)中的一种。式(1.7-32)要求 $G_{xf}(\omega)$ 为方阵且满秩,一般较难实现。式(1.7-34)只能得到频响函数的幅值信息,不能得到相位信息。式(1.7-29)使用较普遍,但其要求 $G_{ff}(\omega)$ 可逆。如果各激励互不相关, $G_{ff}(\omega)$ 不仅可逆,而且还退化为对角阵,式(1.7-29)变为式(1.7-30)的形式。由此可知,使用多点随机激励直接得到的是频响函数矩阵 $H(\omega)$ 。如果激励点数为 p ,响应点数为 n ,则 $H(\omega)$ 为 $n \times p$ 阶矩阵。

使用多点随机激励进行频响函数估计有固有缺点。其一,该方法要求 $G_{ff}(\omega)$ 可逆,即要求各激励互不相关,这使激振变得复杂起来。事实上各激励信号经常是弱相关的,容易使 $G_{ff}(\omega)$ 产生病态,求逆困难。其二,由于使用随机信号通过功率谱密度函数估计频响函数,其间要做平均,在多通道激励和响应的采集与处理上,数据量变得很大,费时很长,使数据处理效率降低。

与多点随机激励相反,多点全相干激励要求各点激励完全相干,具有固定的比例关系,因而要求激励信号为确定性信号,如快速正弦扫频、随机猝发、周期随机、冲击等激励信号,并且,不使用功率谱密度函数,而是直接使用傅氏谱进行频响函数估计。与多点随机激励相比,多点全相干激励试验方法简单,结果更精确。下面简单介绍这种方法的思想。

在确定性激励作用下,频响函数的表达式为

$$X(\omega) = H(\omega)F(\omega) \quad (1.7-5)$$

设有 p 个点激励,测 n 个点的响应,则 $X(\omega)$ 为 n 阶列阵, $H(\omega)$ 为 $n \times p$ 阶矩阵, $F(\omega)$ 为 p 阶列阵。

为了能用式(1.7-5)估算频响函数矩阵 $H(\omega)$,需要构造满秩方阵 $F(\omega)$ 。为此,使用 p 个激励器进行 p 次激振,并做 p 次激励与响应的傅氏变换,分别记为 $F_i(\omega)$ 、 $X_i(\omega)$ ($i=1, 2, \dots, p$)。将其按列排成矩阵

$$\left. \begin{aligned} F(\omega) &= [F_1(\omega) \quad F_2(\omega) \quad \cdots \quad F_p(\omega)] && p \times p \text{ 阶} \\ X(\omega) &= [X_1(\omega) \quad X_2(\omega) \quad \cdots \quad X_p(\omega)] && n \times p \text{ 阶} \end{aligned} \right\} \quad (2.3-3)$$

由式(1.7-5),得

$$X(\omega) = H(\omega)F(\omega) \quad (2.3-4)$$

若 $F(\omega)$ 满秩,则

$$H(\omega) = X(\omega)F^{-1}(\omega) \quad (2.3-5)$$

只要 $F(\omega)$ 各列 $F_i(\omega)$ 互不相关, $F(\omega)$ 即为满秩。容易想到 $F(\omega)$ 可取下述形式

$$F(\omega) = \alpha(\omega)B \quad (2.3-6)$$

式中, $\alpha(\omega)$ 为常值谱; B 为满秩常数矩阵。如 p 取 4,则

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.3-7)$$

由此看出,在 p 次多点激励中,每次激振时各力具有确定的关系。

事实上, \mathbf{B} 可取任意形式,只要各列不相关即可。而且,最好将 \mathbf{B} 取为正交阵。当 \mathbf{B} 为单位阵时,则退化为多次单点激励。

由此可见,多点全相干激振实现容易,且数据处理量比多点随机激励小得多。即使不做平均,采用多点全相干激励也能达到相当满意的效果。如采用时域“系集平均”或“多点平滑”处理,效果更佳。

总之,多点激励具有以下主要特点:

- ①不易遗漏模态;
- ②输入能量大且传递均匀,获得的频响函数信噪比高;
- ③一次性获得频响函数矩阵,比单点激励分别求出的频响函数矩阵一致性要好。

2.3.3 单点分区激励

对较大型结构,采用多点激励能获得满意的频响函数。然而,由于激励设备复杂,许多测试单位并不具备多点激励的条件。为此,可采用单点分区激励技术。

单点分区激励的基本假设是,单点激励仍能激发出系统的各阶模态,但只在激振点附近的响应较大,远离激振点的响应可以较小。该方法的基本思想是,将被测结构分成几个区,在每个区域内实施单点激励并测出该区内各点之间的频响函数;最后,再测出各区域激励点之间的频响函数,将各区频响函数联系起来。各区频响函数组成整体结构的频响函数,以此识别整体模态振型。

如在 BJ-3 型内燃机车模态试验中,将内燃机车分成 4 个区,总自由度(测点数)为 n , 4 个区域内测点号分别为 $1 \sim c$ 、 $c \sim h$ 、 $k (= h+1) \sim l$ 、 $l \sim n$ 。在①区内,激励 c 点,测 $1 \sim c$ 点响应,得频响函数 $H_{1c} \sim H_{cc}$;在②区内,激励 $c \sim h$ 点,测 c 点响应,得频响函数 $H_{cc} \sim H_{ch}$;在③区内,激励 $k \sim l$ 点,测 l 点响应,得频响函数 $H_{lk} \sim H_{ll}$;在④区内,激励 l 点,测 $l \sim n$ 点响应,得频响函数 $H_{ll} \sim H_{nl}$ 。这些频响函数的位置在频响函数矩阵中表示如下:

$$\mathbf{H}(\omega) = \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} 1 & c & h & k & l & n \end{array} \\ \left[\begin{array}{cccccc} \boxed{\begin{array}{c} H_{1c} \\ \vdots \\ H_{cc} \end{array}} & & & & & \\ \boxed{\begin{array}{c} H_{cc} \cdots H_{ch} \end{array}} & & & & & \\ & \boxed{\begin{array}{c} H_{lk} \cdots H_{ll} \end{array}} & & & & \\ & & \boxed{\begin{array}{c} H_{ll} \cdots H_{nl} \end{array}} & & & \end{array} \right] \begin{array}{c} 1 \\ c \\ h \\ k \\ l \\ n \end{array} \end{array} \quad (2.3-8)$$

根据频响函数矩阵的对称性,在②区内, $H_{c+1,c} \sim H_{hc}$ 分别与 $H_{c,c+1} \sim H_{ch}$ 相等,再考虑①区内测得的 $H_{1c} \sim H_{rc}$,则得 $\mathbf{H}(\omega)$ 第 c 列第 $1 \sim h$ 行元素,组成 h 阶列阵为:

$$\mathbf{H}_c^A = [H_{1c} \ H_{2c} \ \cdots \ H_{hc}]^T = [H_{1c} \ \cdots \ H_{rc} \ H_{c,c+1} \ \cdots \ H_{ch}]^T \quad (2.3-9)$$

同理,由③、④区内测得的频响函数可组成 $\mathbf{H}(\omega)$ 中第 l 列第 $k(=h+1) \sim n$ 行元素,写成

$$\mathbf{H}_l^B = [H_{kl} \ H_{k+1,l} \ \cdots \ H_{nl}]^T = [H_{hk} \ \cdots \ H_{ll} \ H_{l+1,l} \ \cdots \ H_{nl}]^T \quad (2.3-10)$$

为 $(n-h)$ 阶列阵。由 \mathbf{H}_c^A 和 \mathbf{H}_l^B ,利用参数识别求得模态振型矢量的前、后部分,组合起来即整体振型。

以上单点分区激励方法可以从以下几点进行改进:

①假设结构只分为 I、II 两个区, I 区为上面①②区之和, II 区为上述③④区之和,由式(2.3-8)可见,仍以 c 和 l 为基准测点,则这两测点均在 I、II 区的中部,而不像上述工作中在①②区和③④区的联接部位,这样,使频响函数测试质量提高;

②根据频响函数的对称性,可采用单点激励逐点拾振或逐点激励单点拾振任意方式;

③激励信号不一定是锤击激励,还可选用其他激励信号。

最后指出,用单点分区激励做模态分析的方法相当于在原装支撑下子结构模态综合法,但比一般的子结构方法要简单得多,且不存在联接条件处理上的误差,是一种值得推广的方法。

此外,还可采用增测两激励点 c 、 l 之间频响函数 H_d 或 H_k 的做法。这种做法的好处是利用 H_d 或 H_k 建立①②区和③④区频响函数的联系,使识别出的振型向量 $\boldsymbol{\varphi}$ 更准确。然而,由于 c 、 l 两点相距较远, H_d 或 H_k 的测试质量下降,亦会影响振型的识别精度。

2.4 激励装置

激励有人工激励和自激励(自然激励)。人工激励即通常所说的激励,根据需要通过一定的激励装置施加于被测结构上。大部分人工激励可以控制和测量,做模态实验绝大部分情况是使用人工激励。自激励是施加于实体结构上的自然力,如风载荷、波浪载荷、机器运转时的动力源等等。自激励一般是不可控制、不可测量的。使用自激励通常只能测得响应信号,故只能用时域法进行参数识别。下面讨论模态实验中经常使用的人工激励。

典型的激励装置有激振器系统、冲击锤、阶跃激励装置。

2.4.1 激振器系统

激振器一般必须与信号发生器、功率放大器一起组成激励系统才可使用。激振器系统如图 2.4-1 所示。由激振器系统产生的激励信号广泛,可控性强,自动化程度高,因而是最常用的激励装置。

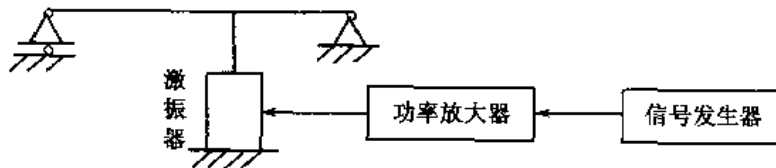


图 2.4-1 激振器激励系统

1. 信号发生器

信号发生器提供激振器所需要的激励信号源。信号源类型一般有以下几种:

①稳态正弦信号,稳态正弦信号的频率可以缓慢变化,即慢扫频正弦信号,可以是连续慢扫频正弦信号或分段慢扫频信号;

②周期信号,有多种类型,如快速扫频正弦信号、伪随机信号、周期随机信号等;

③随机信号,可提供纯随机(白噪声)、宽带随机或窄带随机信号等多种类型;

④猝发信号,如扫频正弦猝发信号、随机猝发信号等。

信号发生器提供的激励信号可以是模拟信号,也可以是数字信号。如 B&K 公司的 1019 正弦信号发生器是模拟式的,1026 正弦—窄带随机信号发生器是数字式的。数字式信号发生器提供的信号质量较模拟式信号要高得多,故逐渐成为主流信号源。大多数信号发生器是硬件设备,也有些信号源由计算机软件实现。计算机提供的信号源更易于控制和改变。值得注意的是,无论是数字信号发生器,还是计算机辅助产生的信号源,最终均以模拟电压信号输出。

2. 功率放大器

信号发生器提供的激励信号主要是包含特定频率成分和作用时间的电压信号,一般能量很小,无法直接推动激振器,必须经过功率放大器进行功率放大后转换为具有足够能量的电信号,驱动激振器工作。

为了得到稳定输出,功率放大器内部都设有深度负反馈电路。根据负反馈类型不同,功率放大器分为定电压功率放大器和定电流功率放大器。定电压功率放大器采用电压负反馈电路,保证输出信号电压恒定,不随负载变动而改变;而定电流功率放大器采用电流负反馈电路,保证输出信号电流恒定。有的功率放大器兼有这两种功能,使用更为方便。

两种形式的功率放大器在模态实验中的用途不同。对于定电流功率放大器,输出信号电流恒定,通过激振器产生的激振力幅恒定。当振动系统进入共振区时,会产生很大的响应,容易使测量放大器过载。而定电压功率放大器,在系统进入共振区时,响应增大,负载反射阻抗增大,电压恒定,电流减小,通过激振器产生的激振力幅减少;在反共振点附近,响应减小,负载反射阻抗减小,功率放大器输出电流增大,激振力增大。可见,定电压功率放大器在进行频率响应测试时具有很大的优越性,而在进行适调多点激振和多输入多输出频响函数估计时,定电流功率放大器更加适宜。使用功率放大器时要反复调试放大倍数,以使测量系统放大器不致过载,并具有较高的信噪比。

3. 激振器

振动测试技术中的激振器种类很多。按工作原理来分,有机械式、电动力式、电动液压式、电磁式、涡流式和压电式等等;按接触形式不同可分为接触式和非接触式两种。电磁式和电涡流式激振器属于非接触式激振器,其余属接触式激振器。不同激振器的用途不同,在模态实验中,常用电动力式激振器和电动液压式激振器。这两种激振器均需信号发生器和功率放大器提供激励信号。

以上简单介绍激振器激励系统,有关激振器试验详细内容见 2.7 节。

2.4.2 冲击锤

冲击锤又称力锤,是模态实验中另一种常用的激励装置。目前冲击锤多用于 SISO 参数识别方法中。锤击激励提供的是一种瞬态激励,这种激励只需一把冲击锤即可实现,比激振器

系统要简单得多。冲击锤锤帽可更换,以得到不同的冲击力谱。冲击锤锤头可有不同的重量,以得到不同能量的激励信号。对普通结构,用 SISO 频域法做参数识别时,使用冲击锤一般能得到相当满意的结果。加之激励设备简单,价格低廉,使用方便,对工作环境适应性较强,特别适于现场测试,故一般工程测试单位中均将锤击激励作为优先考虑的激励方式之一。对锤击试验更详细的讨论见 2.8 节。

2.4.3 阶跃激励装置

阶跃激励是模态实验中特有的一种激励方式,它是通过突加或突卸力载荷(或位移)实现对系统的瞬态激励。如使用刚度大、重量轻的缆索拉紧被测结构某一部分,突然释放缆索中的拉力,形成系统的一个阶跃激励。阶跃激励的特点是能给结构输入很大的能量,适于大型、重型结构的模态分析,但激励中高频成分少,一般只能激励出系统的较低几阶主振动。阶跃激励一般是在其他激励方式很难实现时采用,并非一种常用且优选的激励方式。

另外,对于超大型结构,还可采用激波管、火箭筒等特殊方法进行激励,以输入系统非常大的激励能量。

阶跃激励一般难以测量,故需配合时域法做参数识别。

2.5 激励信号

了解激励信号是进行实验模态分析的重要环节。在制定模态实验方案时,必须根据被测结构特点、测试环境、现有仪器条件、测试精度等诸方面选用合适的激励信号。有时需要选择几种激励方式进行试测,以确定最优激励信号。模态实验中往往由于激励信号选择不当而无法收到满意的测试效果。

模态实验中常用的激励信号分为稳态正弦信号、纯随机信号、周期信号和瞬态信号。

2.5.1 稳态正弦信号

稳态正弦信号是模态实验最早采用的一种激励信号。通过缓慢改变正弦信号的频率,可激发出系统的各阶主振动。频率改变方式有两种,一种是通过模拟式正弦信号发生器连续、缓慢改变信号频率,即所谓慢扫频正弦信号;另一种是通过数字式正弦信号发生器非连续、缓慢改变信号频率,即所谓分段扫频正弦信号或步进扫频正弦信号。数字式正弦信号发生器更能精确地控制信号频率的变化,故逐步代替模拟式正弦信号发生器。无论是模拟式扫频正弦信号还是分段扫频正弦信号,频率的变化必须足够慢,以使结构响应达到稳态。另外,还应注意,在共振区附近,信号频率改变量要小;而在非共振区,信号频率可以改变得多一些。一般在测试时,先初步扫频,根据响应确定系统的几个共振峰,再仔细扫频,获得详细激励与响应数据。

稳态正弦扫频信号的频率改变有两种方式,即线性变化和对数变化。对于被测结构关心固有频率范围不大的情形,采用线性扫频;对于关心固有频率范围较大的情形,采用对数扫频要快速有效得多。

稳态正弦信号的优点是:激励能量能集中在单一频率上,测量信号具有很高的信噪比,因而测试精度很高;信号的频率和幅值易于控制;激励的能量级(电平)不同时,在非线性结构中将产生不同的频响函数,因而能检测出系统的非线性程度;采用适调多点激励时,在模态实验

中可以直接得到频域数据(模态数据)。由于稳态正弦信号的上述优点,在一些大型结构的模态实验中,至今仍在应用这种激励形式。

稳态正弦信号的缺点也是明显的:需逐个测量各个频率点上的稳态响应,测试周期相当长,特别是小阻尼时,更加明显;不能通过平均消除系统非线性因素的影响;容易产生“泄漏”误差。

2.5.2 纯随机信号

纯随机信号又称白噪声信号。理论上的纯随机信号是具有高斯分布的白噪声,在整个时间历程上都是随机的,不具有周期性。频率域上是一条平直的直线,包含 $0\sim\infty$ 的频率成分,且任何频率成分所包含的能量相等。

实际应用中的纯随机信号做不到理想情况,都是在一定频率范围内具有高斯分布的平直谱特性的宽带随机信号。早期的模拟随机信号发生器直接将自然噪声,如闸流管和齐纳二级管内随机发射的电噪声放大。这种模拟白噪声信号稳定性差,统计特性难以控制,低频特性差。现在应用的纯随机信号都是由数字式随机信号发生器或计算机产生,统计特性可以精确控制。

使用纯随机激励信号进行模态实验有特殊优越之处,如可以经过多次平均消除噪声干扰和非线性因素的影响,得到线性估算较好的频响函数;测量速度快,可做在线识别。其缺点也较突出,即容易产生泄漏误差,虽然可以加窗控制,但会导致频率分辨率降低,特别是小阻尼系统尤为突出;另外,激励力谱难以控制。尽管信号谱是平谱,但由于被测系统和激振器之间的阻抗不匹配而将导致不同的激励谱。所以,纯随机信号在模态实验中应用得并不多。

2.5.3 周期信号

在测量窗内的任何波形信号,几乎都可以构成一个周期激励信号。模态实验中常用的周期信号有快速扫频正弦信号、伪随机信号和周期随机信号三种。

1. 快速扫频正弦信号

快速扫频正弦信号是一种典型的周期信号,由快速正弦扫频信号发生器产生。在一个选定的时间周期内,正弦信号的频率按一定的扫频方式由某个值迅速增至另一值,实现激励信号的宽频带变化。这一变化频带即所关心的系统固有频率的范围。

快速扫频有两种方式,即线性扫频和对数扫频。线性快速扫频正弦信号和对数快速扫频正弦信号的时间历程和自功率谱见图 2.5-1。

快速正弦扫频信号的优点是可以设定关心的频率范围、信噪比较高和测量速度快。如果分析仪的采样周期(样本长度)等于扫频周期的整数倍,在测量后处理中不会产生泄漏误差。缺点是:由于采样数据是周期、重复性的,故不能用总体平均减少试验结构的非线性影响;此外,扫频周期很短,测量系统的增益和量程不易控制。

2. 伪随机信号

伪随机信号是另一种周期信号。它是由数字电路或计算机产生的一段方差为零的随机信号。在一定频率范围内其幅频特性曲线为一直线,相频特性随机均匀分布。随机信号段的长度就是伪随机信号的周期。伪随机信号每个周期内的相关函数、功率谱密度函数等统计特性是严格不变的,可以准确地重复。

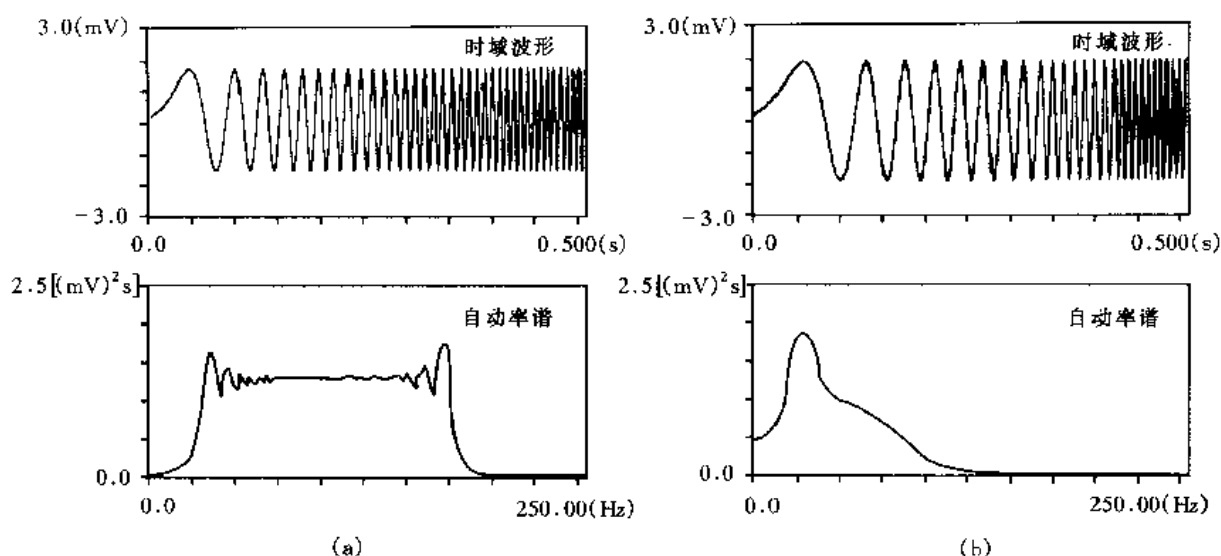


图 2.5-1 快速扫频正弦信号

(a)线性扫频;(b)对数扫频

伪随机信号的优点是:激励信号的大小和频率成分易于控制,测量速度快;如果分析仪的采样周期等于伪随机信号周期的整数倍,可以消除泄漏误差。缺点是:抗干扰能力差;由于信号的严格重复性,不能采用多次平均来减少噪声干扰和测试结构非线性因素的影响。

3. 周期随机信号

周期随机信号实际是一种统计特性变化的伪随机信号。在每个周期内,都是一种伪随机信号,但各个周期内的伪随机信号统计特性不同,即各周期内的伪随机信号互不相关。

周期随机信号综合了纯随机信号和伪随机信号的优点,既具周期性,又具随机性,从而也避免了两种信号的缺点。利用周期性,可以消除泄漏误差;利用随机性,可以采用总体平均的方法减少噪声干扰和非线性因素的影响。缺点是比伪随机激励和纯随机激励要慢一些,但比稳态正弦信号要快得多。

2.5.4 瞬态信号

瞬态信号的形式和产生方式有多种:有信号发生器产生的扫频正弦猝发信号和随机猝发信号;有冲击锤产生的冲击信号和随机冲击信号;有阶跃激励装置产生的阶跃激励信号;有特殊装置如火箭筒产生的冲击信号等等。由于瞬态信号包含较宽的激励力频率成分,且频率成分比较容易控制,故瞬态信号是模态实验中采用的主要激励方式之一。

猝发激励的过程是:首先要进行调试工作,将分析仪的采样时间 T_s 分为两部分,前一部分时间用 T_b 表示。在采样的前一部分时间 T_b 内,将激励信号送给激励器,随即关闭激励信号,结构进入自由响应阶段。观察自由响应时间历程,精心调节激励时间 T_b ,使在整个采样时间 T_s 内,自由响应信号能衰减至零。这样即完成猝发激励的调试工作。然后进行正式激励和测试。

猝发激励有两个特点:一是仅在短暂时间内激励试验结构,激励时间 $T_b = (0.1 \sim 0.75) T_s$,具有周期激励的性质;二是在采样时间 T_s 内,试验结构几乎消耗掉激励的全部能量,使自

由响应趋于零。

对于小阻尼系统,信号衰减要慢得多,需采用加窗处理。

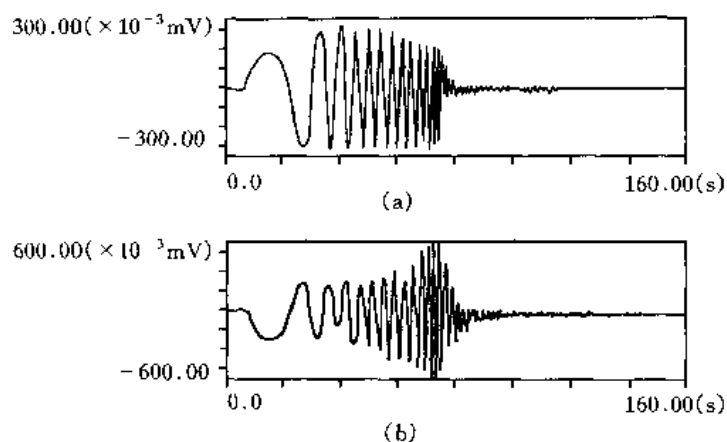


图 2.5-2 扫频正弦猝发信号
(a)激励;(b)响应

1. 扫频正弦猝发信号

以快速扫频正弦信号作为激励信号,并取其扫频周期为猝发激励时间($T_b = T$),便获得扫频正弦猝发信号。扫频正弦猝发信号激励和响应的时程如图 2.5-2 所示。其优点是可消除泄漏误差、信噪比好、测试速度快和容易控制激励的频率含量等等。缺点是为控制猝发时间,需特殊硬件,不能消除结构非线性因素的影响等等。

2. 随机猝发信号

如果以周期随机信号作为激励

信号,周期激励信号的周期作为猝发激励的时间($T_b = T$),就可获得随机猝发信号,又称瞬态随机信号。激励和响应的时程如图 2.5-3 所示。

随机猝发信号具有周期随机信号的全部优点,既具周期性,又具随机性,同时又具瞬态性,测试速度较周期随机激励要快,是一种优良的激励信号。其缺点是为了控制猝发时间,需增加特殊硬件设备。

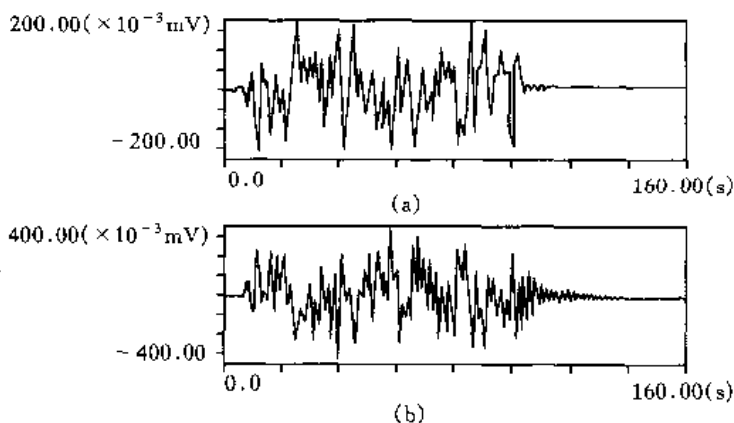


图 2.5-3 随机猝发信号
(a)激励;(b)响应

3. 冲击信号

冲击信号又称脉冲信号,冲击锤(力锤)是产生脉冲激励最常用的激励装置。冲击信号的时间历程和自谱(力谱)见图 2.5-4。冲击信号的频率成分和能量可大致控制,试验周期短,无泄漏,但信噪比差,特别是对大型结构,冲击锤产生的激励能量往往不足以激起足够大的响应信号。即使如此,冲击激励仍不失为一种简单实用的激励方式。

4. 随机冲击信号

随机冲击信号由冲击锤经随机敲击得到。各次冲击的时间间隔和冲击力幅值都是随机变化的,要尽量避免各次冲击形成的固定节拍。其时间历程和力谱如图 2.5-5 所示。与单次冲击相比,随机冲击能够提供较大的输入能量。因此,信噪比优于单次冲击信号,可用于较大型结构。特别是结合单点分区激励和分区模态综合法,可得到良好的模态实验结果。

表 2.5-1 给出常用激励信号的基本性质。

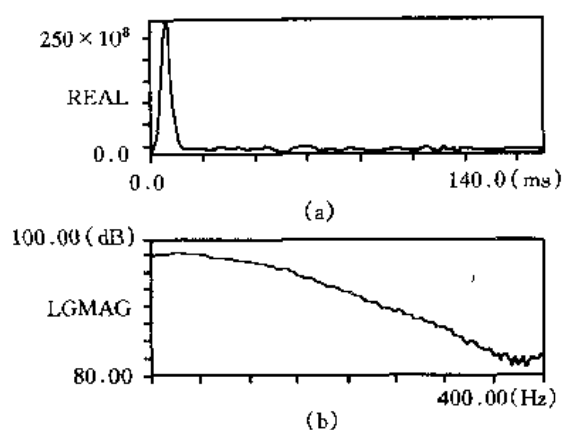


图 2.5-4 冲击信号
(a)时间历程;(b)自谱

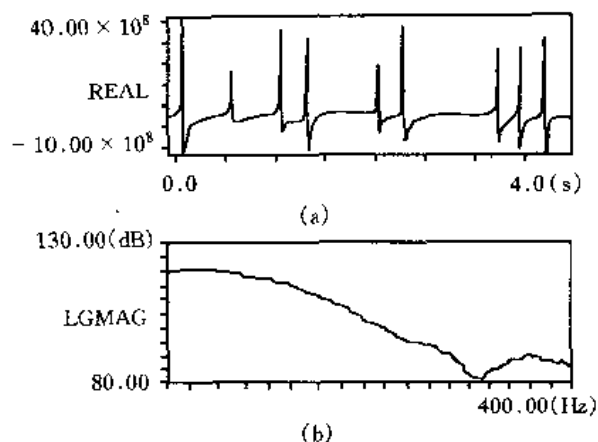


图 2.5-5 随机冲击信号
(a)时间历程;(b)自谱

表 2.5-1 常用激励信号基本性质一览表

		能否 减小 泄漏	信 噪 比	有效 值峰 比	测试 时间	控制 频率 含量	控制 幅值 大小	消除 失真	非线性 特性
稳态正弦		否	很高	高	长	能	能	否	有
纯随机		否	一般	一般	好	能*	否	能	无
周期 信号	伪随机	能	一般	一般	很好	能*	能*	否	有
	周期随机	能	一般	一般	一般	能*	否	能	无
	快速正弦扫频	能	高	高	一般	能*	能*	否	有
瞬态 信号	扫频正弦猝发	能	高	高	很好	能*	能*	否	有
	随机猝发	能	一般	一般	很好	能*	否	能	无
	冲击	能	低	低	很好	否	否	否	无
	随机冲击	能	一般	一般	很好	否	否	否	无

* 需要附属设备或硬件。

2.6 测量系统

测量系统负责将被测机械量采集下来,转换成某种电信号,经前置放大和微积分变换,变成可供分析仪器使用的关心机械量的电压信号。测量系统由传感器及其配套测量电路组成,如图 2.6-1 所示。测量系统是整个动态测试系统的基本环节之一,直接关系到试验的成败和精度。选择测量系统要考虑试验要求的频率范围、幅值量级、测量参数(位移、速度、加速度、力、应变等)及试验环境、测试条件等多种因素。

传感器可以有多种分类方法。如根据与被测结构的接触方式不同,分为接触式和非接触式两种;根据测试信号不同,分为力传感器和响应传感器,而响应传感器中又有位移传感器、速度传感器、加速度传感器及应变传感器等;根据传感器换能方式不同,分为电感式、电动式、压电式、压阻式、涡流式等几种;根据传感器接收信号方式不同,分为绝对式和相对式两种。不同传感器和与其配套的测量放大电路组成不同类型的测试系统,以适应不同的测试目的。

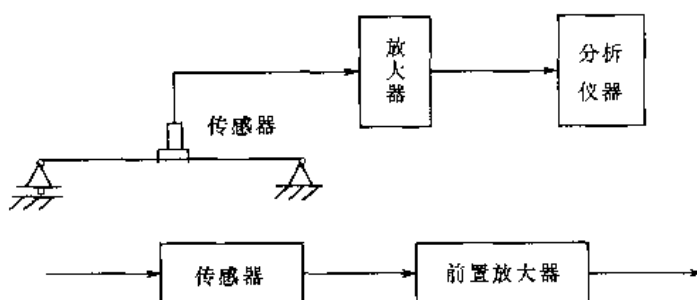


图 2.6-1 测量系统

模态实验中常用压电式力传感器和压电式加速度传感器,属于绝对式、接触式传感器,与之配套的测量放大器是电荷放大器。压电式传感器的敏感元件是压电晶体,利用压电晶体的压电效应,将机械量(力、加速度)转换为电荷量,经电荷放大器放大并以电压量输出。压电式传感器具有体积小、重量轻、灵敏度高、线性度好、性能稳定、频率范围大、有较宽的动态范围等优点。

2.6.1 压电式力传感器

压电式力传感器有压力型、拉力型、冲击型和组合型几种。

1. 基本构造与技术参数

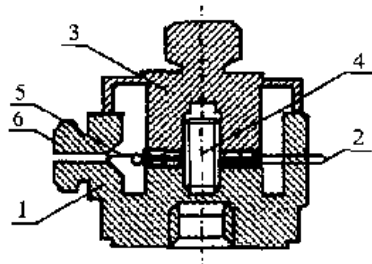


图 2.6-2 压电式力传感器构造图

1—基座;2—压电元件;3—顶盖;
4—螺栓;5—导线;6—插座

图 2.6-2 给出 B&K8200 压电式力传感器的基本构造图。它由基座 1、压电元件 2 和顶盖 3 组成,用中心螺栓 4 将其连在一起,并给以一定预压力。在外力作用下,压电元件产生正比于外部作用力的电荷量,经导线 5 引至输出插座 6,再接至电荷放大器归一、放大,变为可供分析的模拟电压信号。

B&K8200 力传感器在制造时给压电元件施加了预压力,既可测压力又可测拉力和冲击力,是一种组合型力传感器。

压电式力传感器最主要的技术参数是电荷灵敏度。电荷灵敏度表示压电式力传感器在单位力作用下产生的电荷量,用 S_q 表示,单位为 pC/N 。表 2.6-1 给出 B&K8200 力传感器和我国航天部 702 所生产的 5111 力传感器的主要技术参数。

2. 选择力传感器的注意事项

应根据所选激励方式确定力传感器的类型。如用激振器,宜选用组合型力传感器;如用冲击锤激励,宜选用冲击型力传感器。

应配合好力传感器的电荷灵敏度与电荷放大器的量程,使在测试过程中能产生一个既不过载、又不太弱的可供分析的电压信号。

力传感器的产品说明书、产品证书中均给出力传感器的谐振频率和频响特性。在选用力传感器时,应使模态实验要求的工作频率落在力传感器频响函数的线性段范围内。

调整功率放大器的增益,使试验中可能产生的最大冲击力不超过力传感器冲击额定值的 $1/3$ 。

表 2.6-1 B&K8200 型和 5111 型力传感器的主要技术参数

型 号	B&K8200	5111
测量范围(kN)	-5.0~10	50
电荷灵敏度(pC/N)	4	≈4
线性		≤±1%
刚度(N/m)	5.0×10^8	
谐振频率(kHz)	35	≥40
质量(g)	21	70

2.6.2 压电式加速度传感器

压电式加速度传感器又称压电式加速度计,简称加速度计。常用的压电式加速度计有中心压缩式和三角剪切式两种。

1. 基本构造与技术参数

图 2.6-3 是中心压缩式加速度计的构造图。它由基座 1、压电元件 2 和质量块 3 组成,用预压弹簧 4 压紧,封装在金属外壳 5 中。测试时,加速度计固定在被测结构上,随结构一起运动。质量块的惯性力作用于压电元件上,使压电元件产生正比于加速度的电荷量。电荷经导线引至输出插座 6,经连接导线再引至电荷放大器归一、放大,变为可供分析的电压信号。为了得到较高的灵敏度,质量块通常由重金属制成。电荷放大器一般具有积分电路,经一次积分或二次积分,电荷放大器还可输出速度或位移电压信号。

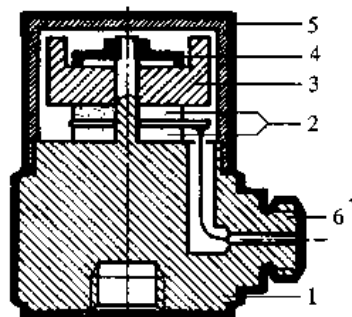


图 2.6-3 中心压缩式
加速度计构造图

1—基座;2—压电元件;3—质量块;
4—预压弹簧;5—金属外壳;6—输出插座

加速度计的灵敏度分电荷灵敏度 S_q 和电压灵敏度 S_v 。电荷灵敏度定义为加速度计接收轴向单位加速度时所输出的电荷量;电压灵敏度定义为加速度计接收轴向单位加速度时输出的电压值。电压灵敏度与连接加速度计和电荷放大器的引线长度有关,而电荷灵敏度与引线长度无关,故使用电荷灵敏度很方便。一般加速度计只提供电荷灵敏度。电荷灵敏度的单位为“ $\text{pC} \cdot \text{s}^2/\text{m}$ ”或 pC/g 。 g 为重力加速度。

横向灵敏度是加速度计另一个重要指标。由于制造误差及压电晶体片极化轴不规则等原因,使得传感器不仅接收轴向加速度,还部分接收横向振动加速度。横向灵敏度定义为传感器接收横向单位加速度所产生的电荷量。横向灵敏度不仅影响信号幅值的测量精度,更严重的是影响信号相位的测量。显然,横向灵敏度越小越好。横向灵敏度与轴向灵敏度之比称为横向灵敏度比,用 TSR 表示。

表 2.6-2 给出 B&K4370、B&K4368、YJZ-1 以及 6159 型加速度计的主要技术参数。

2. 选择加速度计的注意事项

选用加速度计的灵敏度应与电荷放大器的量程相匹配,进行模态实验时的工作频率应落在加速度计频响曲线的线性段内。一般情况下,测试的最高频率不大于加速度计谐振频率的 $1/10$,测试中可能产生的最大加速度不超过额定值的 $1/3$ 。

表 2.6-2 几种压电式加速度计的主要技术参数

型 号	B&K4370	B&K4368	YJZ-1	6159
电荷灵敏度($\text{pC} \cdot \text{s}^2/\text{m}$)	10	4.5	1.5	2.0
最大加速度	2 000g	2 000g	3 000g	1 200g
谐振频率(kHz)	6	9	10	30
横向灵敏度($\text{pC} \cdot \text{s}^2/\text{m}$)	<4%	<4%	<5%	<3%
质量(g)	54	30	13	17

加速度计在出厂前要逐个标定横向灵敏度,并将最小横向灵敏度方向用红点标注于外壳上。安装加速度计时,应将红点对准测点横向振动最大的方向,以最大限度减小横向灵敏度的影响。

加速度计属接触型传感器,应尽量与试验结构固连好。固连的方式有钢螺栓连接、绝缘螺栓连接、蜂蜡粘合、磁座吸合以及手持等等。固连方式直接影响加速度计的谐振频率,因而也影响其频响曲线的线性范围。表 2.6-3 给出各种连接方式下加速度计的动力特性。表中的频响范围是以 B&K4367 加速度计频响曲线上误差 0.5dB 处的频率 10kHz 为参考的。

表 2.6-3 B&K4367 加速度计不同连接方式下的动力特性

固定方法	许用最高温度(℃)	频响范围(kHz)
钢螺栓连接*	>250	10
绝缘螺栓连接*	250	8
蜂蜡粘合	40	7
磁座吸合	150	1.5
手持触杆		0.4

* 在结合面上涂一薄层硅脂。

尽管目前加速度计做得很小,但对轻型结构,仍需注意加速度计的附加质量影响。可用如下方法鉴别加速度计质量载荷效应对试验结构动力特性的影响程度。首先将加速度计固连在试验结构上,测量该测点与激励点之间的频响函数;其次,在此加速度计上再安装一同样的加速度计,再次测量同一频响函数。比较两次测量频响函数曲线的差异,如果固有频率和幅值相差较大,说明此种加速度计对结构的附加质量有明显影响,如图 2.6-4 所示。此时,应更换一质量更小的加速度计。然而,质量小的加速度计的灵敏度也小,所测信号信噪比会降低,必须考虑这一矛盾。

除上述介绍的压电式力传感器和压电式加速度计外,还有一种称为阻抗头的压电式传感器。阻抗头是将压电式力传感器和加速度计做在一起的传感器,如图 2.6-5 所示,适于测点阻抗或原点频响函数。

3. 新型模态加速度计

近年来,为了解决传统压电式加速度计存在的问题,推出了多种新型模态加速度计。如瑞士 Kistler 公司研制的压电梁式(Piezo BEAM)加速度计,将压电材料加工成中间固支的屈梁,梁在弯曲变形时产生的电荷与敏感轴方向的加速度成正比,电荷经内置微电子放大器转换为电压输出,如图 2.6-6 所示。由于这种加速度计不用质量块,因而避免了传感器质量与灵敏度之间的矛盾。如 Kistler8630 系列压电梁式加速度计灵敏度可达 1 000 mV/g,而质量仅 5 克

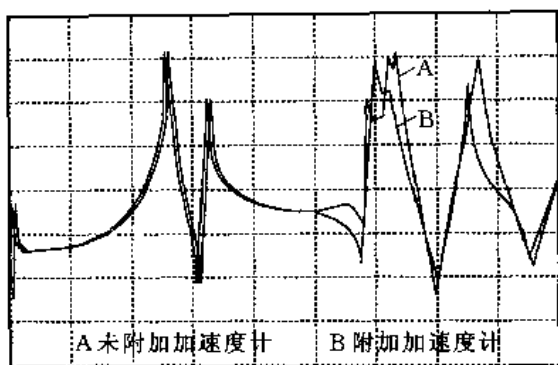


图 2.6-4 加速度计的质量载荷效应

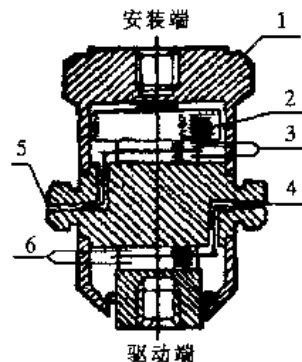


图 2.6-5 阻抗头

1—外壳;2—质量块;3、6—压电元件;4—力输出端;5—加速度输出端

左右,频率范围可达 0.5 Hz~2 kHz,量程为 $\pm 5g$ 或 $\pm 50g$,有单轴、三轴以及多种安装形式。PCB 于 80 年代中期和 1990 年也相继推出了具有类似特点的模式传感器 Structcel 和 Plexcel。

传统模态实验中,只能测量平动加速度而无法测量转动加速度。为了与分析模型(如 FEM)相对应,Kistler 还研制成功可同时测量平动和转动加速度的压电梁式加速度计(TAP)。

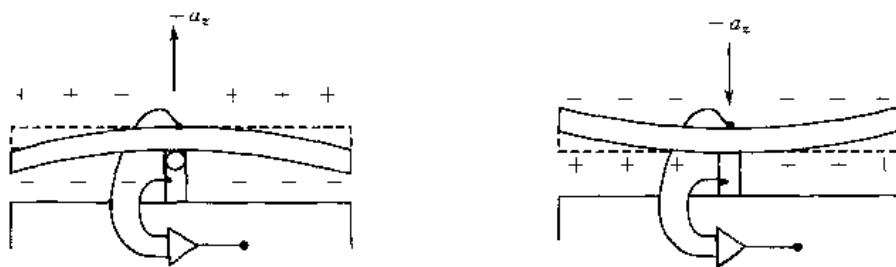


图 2.6-6 压电梁式加速度计

2.6.3 电荷放大器

与压电式传感器配套的前置放大器有电压放大器和电荷放大器。使用电压放大器时,由于加速度计电压灵敏度随引线长度改变而改变,给测试带来不便,故人们普遍采用电荷放大器作为压电式传感器的测量放大电路。

电荷放大器的核心是一个具有电容负反馈、且输入阻抗极高的高增益运算放大器。如图 2.6-7 所示。改变负反馈电容值,得到不同的增益即电压放大倍数。此外,电荷放大器还设置有以下功能的电路。

1)低通和高通滤波电路 低通滤波可以抑制测量频带以外的高频噪声,高通滤波可以抑制测量线路中的低频晃动信号。低通滤波由一个低通滤波电路来实现,高通滤波则由并联反馈电阻 R_f 来实现。

2)适调放大器 适调放大器的作用是实现测量电路灵敏度的归一化。不同的压电式传感器的电荷灵敏度不同。为了多点测量方便,要求各通道测量电路具有相同的输出灵敏度。为此,在电荷放大器中设置一个能按传感器灵敏度调节放大倍数的适调放大器。

3)积分电路 多数电荷放大器设置有一次积分和二次积分电路。这样,由加速度计输入

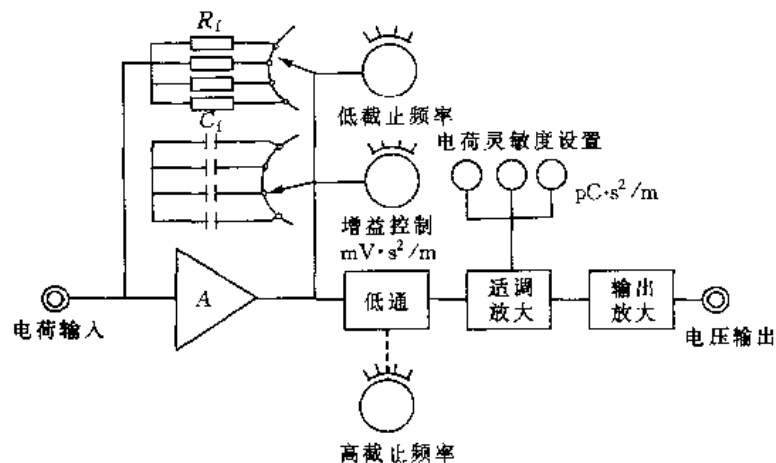


图 2.6-7 电荷放大器基本原理框图

到电荷放大器的与加速度成正比的电荷量可经一次积分转换为与速度成正比的电压信号,或经二次积分电路转换为与位移成正比的电压信号。

电荷放大器频率范围很大,低频能达到 0.1 Hz,而高频可达 100 kHz 甚至更高。表 2.6-4 给出若干种电荷放大器的性能指标。

表 2.6-4 几种电荷放大器的性能指标

型 号	输入范围 (pC)	频率范围 (Hz)	最大输出电压 (V)	最大输出电流 (mA)	特 点	生产厂家
B&K2634	$\leq 10^4$	$1 \sim 200 \times 10^3$	8	8	工业环境	B&K
B&K2635	$\leq 10^5$	$0.2 \sim 100 \times 10^3$ $1 \sim 10 \times 10^3$ $1 \sim 1 \times 10^3$	8	8	(加速度测量) (速度测量) (位移测量)	B&K
DHF-2	$0.1 \sim 10^6$	$0.3 \sim 100 \times 10^3$	10	100	一般测量	北京测振仪器厂
DHF-3	$1 \sim 10^6$	$0.3 \sim 100 \times 10^3$ $10 \sim 1 \times 10^3$ $10 \sim 500$	10	5	(加速度测量) (速度测量) (位移测量)	北京测振仪器厂

电荷放大器作为压电式传感器的前置放大器已具有明显的优点。其缺点是价格昂贵,特别在多通道测量时,需用几个甚至几十个电荷放大器,一般测试单位往往不具备这样的条件。PCB 于 1973 年开发了 ICP 集成电路压电技术,制成 ICP 压电传感器。这种传感器将微型电压放大器(或阻抗变换器)直接装入压电传感器内部,使压电传感器高电荷阻抗输出变为放大后的低阻抗电压输出,内置引线电容几乎为零,解决了使用普通电压放大器时的引线电容问题,造价大大降低,且使用简单,推动了多点测量技术的应用。目前,ICP 传感器(Kistler 称为 Piezotron, B&K 称为 Detlatron)已逐渐成为现代模态实验的主流传感器。

20 世纪 60 年代广泛使用的电荷模式加速度计称为第一代加速度计;70 年代研制成功的 ICP 传感器称为第二代加速度计;80 年代后期出现了内置微电子电路,实现了模、数混合模式信号传输的第三代智能传感器;到 90 年代,第四代传感器取得实质性进展,它综合了数据采集和数字信号处理的功能,实现了真正意义的智能传感器。

2.6.4 使用测量系统注意的一些问题

1. 传感器与电荷放大器之间电缆线的连接

尽量避免电缆线与试验结构之间的相对运动。应将传感器到电荷放大器的电缆线与试验结构固定好,一般用胶带或蜡粘接,如图 2.6-8 所示。因为相对运动会引起电缆线的动力弯曲、压缩、拉伸等变形,使电容或电荷发生变化,产生干扰噪声和低频晃动影响。同时,还应避免电缆打弯、打扣或严重拧转等。电缆线离开试验结构的部位应尽量选择振动小的部位。另外留在地面上的电缆线,应绝对避免脚踩或重压。

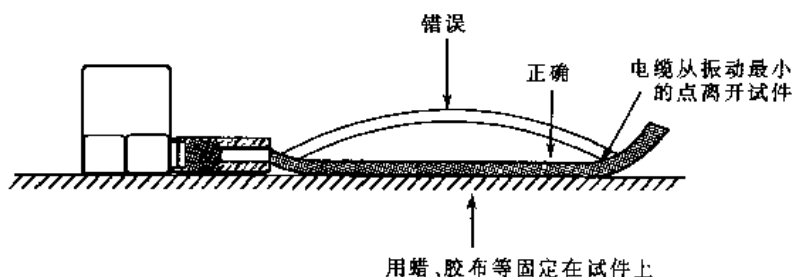


图 2.6-8 传感器电缆的固定

2. 测量系统的有效工作频率范围

压电式加速度计具有零频率效应,而电荷放大器不具备零频率效应。因而,整个测量系统并不具有零频率效应。电荷放大器的下限截止频率分为幅值下限频率和相位下限频率两种。幅值下限频率比相位下限频率低,如 B&K2635 电荷放大器幅值下限频率为 0.2 Hz,而相位下限频率为 2 Hz。对加速度计来讲,也有两种上限截止频率,即幅值上限频率和相位上限频率。幅值上限频率比相位上限频率要高。在模态实验中,不仅要求一定的幅值测试精度,也要求一定的相位测试精度。因而,宜选择相位截止频率为有效工作频率范围。它比以幅值截止频率为上下限的频率范围要窄,如图 2.6-9 所示。

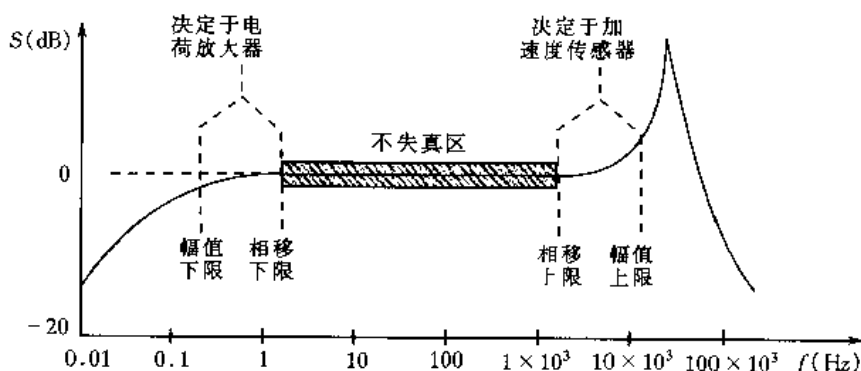


图 2.6-9 测量系统的有效工作频率范围

3. 噪声干扰的抑制方法

任何测试信号和分析结果中都包含噪声成分。噪声的来源包括电源、仪器内部电子线路、各种连接导线及其与仪器组成的网络以及大地。因此,噪声的表现形式有来自电源的工频(50Hz)正弦信号及其各次谐波成分,有来自其他方面的随机噪声信号。在模态实验中,抑制噪声影响的途径有两类:一是在测试系统中采用合理的减噪措施,二是在分析过程(动态测试

后处理)中采用平均技术。后者将在第3章详细介绍,这里先介绍在测试系统中采取的一些措施。这些措施如下:

①使用稳压电源,可减小或消除电压波动引起的噪声;

②各测试仪器电源都要尽量从总电源(稳压电源)的输出端或靠近总电源的输出端接出,且功率大的仪器电源接入端应安排在功率小的仪器电源接入端口之后,这样可以减少共电源仪器之间由于电流波动造成的相互影响;

③测试系统应良好接地;

④所有电源线与信号线均应采用屏蔽线,且避免电源线和信号线并行,应使其尽量远离;

⑤注意各仪器之间阻抗匹配;

⑥测试系统连接好以后,注意开始测试时仪器电源开关的顺序,测试过程中不要拨动仪器开关,否则将产生高频噪声和出现瞬时过载现象,甚至损坏仪器。

测试系统接地是电测系统中的一个重要问题。良好接地的原则是测试系统要单点接地。如果是多点接地,则形成一个或多个回路,导致测量信号中产生大量干扰信号,其中主要是50 Hz交流噪声,如图2.6-10所示。单点接地的方式有并联接地和串联接地两种。所谓并联接地,是将各测试仪器的地线并联地连接到同一接地点,如图2.6-11所示。这种接地方式效果最好,但需联接几根较长的地线。另一种单点接地方式是将所有仪器的地线用一根线连在一起,然后选择一个接地点接地,一般选在主要仪器的接地点上,这种方式即串联接地,如图2.6-12所示。注意,不管何种单点接地方式,传感器都要与被测结构绝缘。

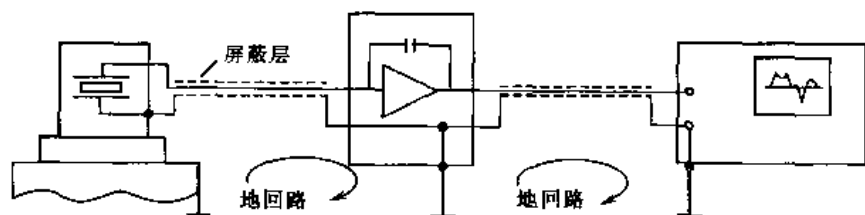


图 2.6-10 多点接地引起的地回路

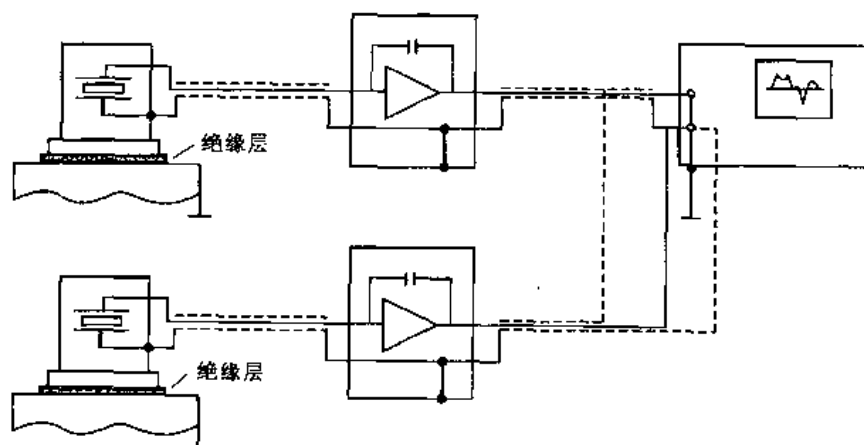


图 2.6-11 单点接地的并联方式

此外,浮动输出也是一种良好的接地方式。浮动输出中各测量仪器均各自接地,但接地线并非信号线,而是接连电缆的屏蔽线,信号线则在屏蔽线内。如图2.6-13所示。

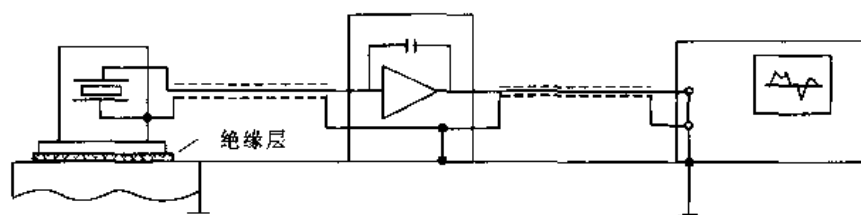


图 2.6-12 单点接地的串联方式

测试系统接地点与其他接地点(特别是大电流电路系统)应严格分开。通常,要求振动测试仪器接地电阻不大于 $4\ \Omega$ 。

4. 传感器的优化配置

传统模态实验中,传感器一般凭经验配置。近年来,人们提出若干优化配置理论,主要有:①基于动能原理,在动能较大坐标配置传感器;②振型独立原理,即选择测点坐标振型矢量最大程度互不相关;③振型缩聚原理,如去除有限元模型中刚度/质量比较大坐标进行模型缩聚,以最大限度保留低频振型信息;④频率响应函数(FRF)向量线性独立原理,不仅可以消除传感器余度,而且可以得到条件数较好的 FRF 矩阵等。同时,还提出了传感器优化配置的判定准则,以对各种优化配置方法进行评定和比较。

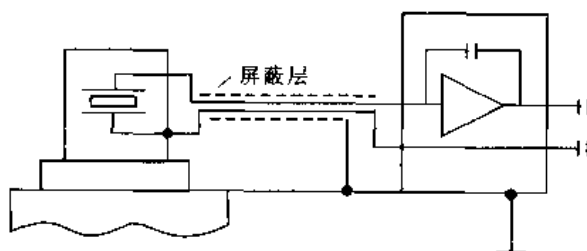


图 2.6-13 浮动输出的接地方式

2.7 激振器试验

激振器试验是模态实验的主要形式。这种试验易于控制,测试速度快,得到广泛应用。图 2.7-1 是单输入单输出激振器试验时间历程的测试框图。

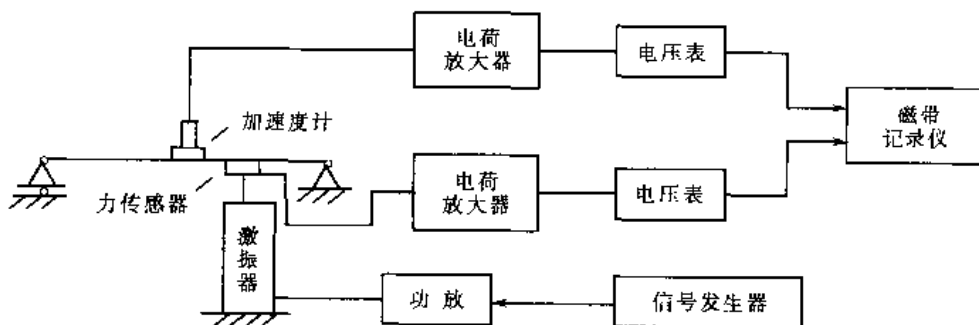


图 2.7-1 单输入单输出激振器试验时间历程测量

2.7.1 激振器

激振器有多种形式,电动力式激振器和电动液压式激振器是模态实验中常用的两种形式。

1. 电动力式激振器(电动式)

图 2.7-2 是一种电动力式激振器的结构原理图。其基本原理是电磁感应定律,通电导体在磁场中受力,将由功率放大器提供的激励电信号转换为激振力信号。

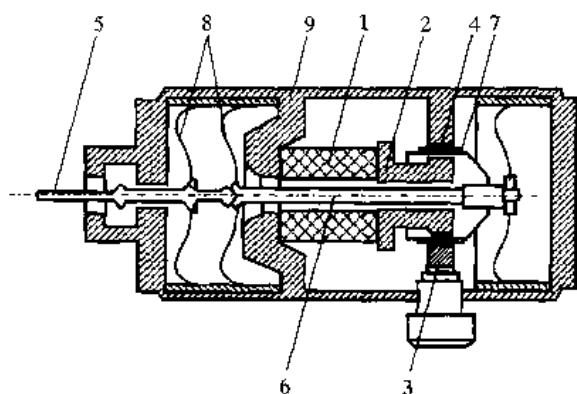


图 2.7-2 电动力式激振器结构原理图

1—磁铁；2—铁心；3—磁极；4—环形气隙；5—顶杆；
6—芯杆；7—线圈架；8—支承弹簧；9—外壳

电动力式激振器结构主要由固定磁路部分、可动部分和外壳三部分组成。固定磁路部分包括磁铁1、铁心2、磁极3，作用是在环形气隙4中产生一恒定磁场。可动部分包括顶杆5、芯杆6、线圈架（动圈）7和支承弹簧8。外壳9将上述两部分结构封装起来，并提供引线、安装螺孔、限幅结构等附件。

电动力式激振器顶杆与结构之间一般通过预压力顶紧接触（通常顶杆与结构之间还有推力杆和力传感器），以使在正常测试时顶杆与结构之间不会脱离，并且，此时支承弹簧的刚度最小。支承弹簧刚度与可动

部分质量是经过严格设计的，以使对结构的附加刚度和附加质量最小。

电动力式激振器具有频率范围大（上限频率可高达30 kHz，下限频率可低至1~3 Hz），激振力幅值、频率及相位易于调整，可动部件质量和刚度小，激振力大（最大可至几千牛顿）的优点。缺点是低频特性不好，对超大型结构（如飞机、火箭、航天器等）激励能量不够。尽管如此，电动力式激振器仍是常规结构模态实验最常用的激振装置。

2. 电动液压式激振器（电—液式）

电动液压式激振器是一种电控制、液压驱动的激振器，结构要比电动式激振器复杂得多。它由电动部分、液压驱动部分和激振部分组成。工作原理是，经功率放大器放大的激励信号送至电动部分，经液压驱动部分将激振力放大，最后由激振部分输出至结构上产生足够大的激振力。

电动液压式激振器是一种大型激振设备，可承受几千牛顿的预压力和高达几百千牛顿的激振力，激振器可动部分行程亦可高达 ± 100 mm，低频特性良好，可输出1 Hz以下的激振力，非常适于大型和超大型结构的模态实验。这种激振器缺点是频率上限较低，一般最高可至1 000 Hz，且价格昂贵。

2.7.2 激振器的支撑方式

希望激振器产生的激振力能够有效地施加到试验结构上，这就要考虑测试结构的动态特性、激振器的动态特性、激振器的安装条件等多种因素。常用以下三种方式支撑激振器。

1. 刚性固定在基础上

将激振器外壳刚性固定在基础或固定支架上，如图2.7-3(a)所示。理想情况下，基础或支架应是刚性的。事实上，这种理想情况很难达到，基础或支架总是弹性的。激振器与基础部分组成振动系统的第一阶固有频率称为安装频率。刚体支撑要求安装频率远远大于工作频率。所以，工作频率不宜过高。

2. 弹性固定在基础上

如果所关心结构的固有频率很高，工作频率不能满足远远低于安装频率的条件，刚性支撑效果将很差。这时，可采用相反的一种安装方式即弹性固定在基础上的支撑方式，如图2.7-

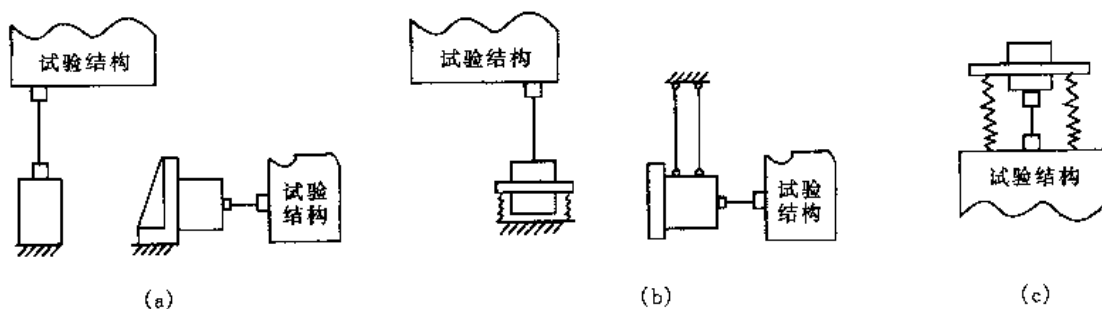


图 2.7-3 激振器的支撑方式

(a)刚性固定在基础上;(b)弹性固定在基础上;(c)弹性固定在试验结构上

3(b)所示。此时安装频率远远小于工作频率。弹性支撑一般用软弹簧或橡胶绳实现。在这种支撑下工作时,激振器可动部分和不动部分质心基本保持不动。这种固定方式的缺点是激振力偏小。

当激振器在低频工作范围内工作时,为了产生足够大的激振力,宜在激振器外壳上附加一质量块。

3. 弹性固定在试验结构上

上述两种方式都是将激振器安装在基础上。有些情况下,试验现场难以找到安装部位,特别是一些大型结构,如桥梁、飞机、桩基、采油平台等,往往无法在周围的基础上固定激振器。这时的解决办法是将激振器弹性地固定在结构本身的适当部位,如图 2.7-3(c)所示。对大型结构,激振器的附加质量是微不足道的。

值得注意,应使支撑刚度尽量减小,以避免由支撑传到结构上的力较大而产生明显的多点激励。

以上三种支撑方式都适于单点激励,只有刚性支撑适于做多点激励。

2.7.3 激振器与结构之间的连接方式

激振器顶杆与结构之间一般都安装力传感器。此外,为保证实现单点激励,即保证单一方向施加激振力,宜在激振器顶杆和力传感器之间加一细长推力杆,如图 2.7-3 所示。

事实上,激振器顶杆在轴向受到较小约束,而在横向一般受到较大约束。当结构受激励而振动时,激励点不仅产生沿激振器顶杆轴向的振动,还产生沿横向的振动,而顶杆对这种横向振动是限制的。采用推力杆后,推力杆的轴向刚度较横向刚度大得多。所以,激振器作用于结构上的力是沿推力杆轴向的,这是所希望达到的状态。

推力杆的尺寸一般由试验确定,事先也可通过计算初步设计。比如采用直径 3 mm、长度 80 mm 的钢丝。

推力杆与激振器顶杆之间固定连接,与力传感器或测试结构之间的连接方式有固定连接和直接接触。如果是固定连接,力传感器与结构之间也应是固定连接。如果是直接接触,力传感器与结构之间亦可采用磁力吸附等接触方式。注意此时激振器顶杆应有足够的预压力,以使激振时顶杆(或推力杆)与力传感器(或结构)不会脱离。最小预压力由下式估算,

$$F_{\min} = M_L A_L \quad (2.7-1)$$

式中, M_L 为激振器可动部分质量,单位为 kg; A_L 为激振点加速度最大值,单位为 m/s^2 。实际

上,总要通过试验确定合适的预压力。各种模态实验的预压力不同。

2.7.4 激振器试验中注意的几个问题

1. 激振点的选择问题

进行单点激励试验时,选择激振点应以能有效激起各阶模态为原则。显然,如果激振点正好选在结构某阶模态的节点(或节线)上,则该阶模态不能被激发出来。即使激振点在节点(节线)附近,该阶模态的振动信号也很弱。所以,应避免将激振点选在结构模态的节点(节线)处。

如果激振点正好落在某阶模态的反节点(反节线)附近,则激励力能有效地激起该阶模态。但是,由于反节点(反节线)的振动幅值最大,特别是低阶模态,此时,需较大预压力才能使推力杆与力传感器(或结构)不脱离,这将导致增大预压力和传感器附加质量对结构的影响。

因此,合理的激振点应选在适当远离结构低阶模态反节点(反节线)的地方。

事实上,在模态实验前结构的模态特性是未知的,需通过一定方法确定合理的激振点,一般有两途径:

①根据经验确定,如果结构有自由端,激振点宜选在自由端附近,如果结构对称,不宜选在结构对称面上;

②根据试验确定,在通过经验初步确定的基础上,可选定几个激振点进行激励试验,测量若干个频响函数,观察由哪个激振点激励所得到的频响函数不丢失重要模态,则此点为最佳激振点。

此外,尚需考虑激振器的安装是否方便。

2. 力传感器的附加质量影响

在测量一般结构及较大结构时,力传感器的质量影响可以忽略。但在测量轻型结构时,力传感器的质量影响一般不能忽略。一方面使结构动态特性发生改变(响应传感器亦有此影响),另一方面导致测量出的力与实际作用在结构上的力有一误差。

对第二方面的影响分析如下。传感器的受力分析如图 2.7-4 所示。图中 M_L 表示传感器质量; A_x 表示传感器加速度,也即激励坐标的加速度; F_m 表示力传感器测量到的力; F_s 表示作用在结构上的力。由牛顿第二定律

$$M_L A_x = F_m - F_s$$

有

$$F_s = F_m - M_L A_x \quad (2.7-2)$$

可见,测量激振力与真实激振力相差一个力传感器的惯性力。消除这一惯性力影响的方法可由图 2.7-5 所示质量补偿电路实现。

质量补偿电路的原理如下。在激励点布置加速度计,或用阻抗头同时测得力与加速度信号。运算放大器 A_1 从加速度通道取出正比于 A_x 的信号,其输出端信号为 $-M_L A_x$ 。这里“-”号代表输出信号与输入信号相位相反。将此信号与正比于力通道信号 F_m 的信号同时送入加法器 A_2 。在加法器输出端就得到正比于 $F_s = F_m - M_L A_x$ 的信号。这样,如果放大器 A_1 输出端能准确得到正比于 $-M_L A_x$ 的信号,则经过补偿电路的信号是正比于真实激励力 F_s 的信号。

获得代表 $-M_L A_x$ 信号的方法是先将力传感器与结构分开,此时 $F_s = 0$, $F_m = M_L A_x$ 。调

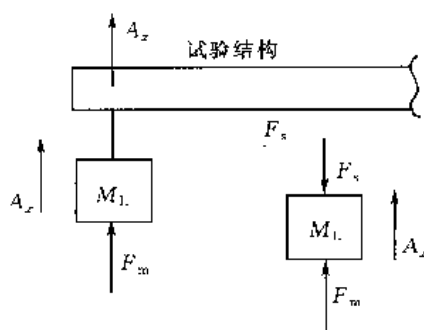


图 2.7-4 力传感器受力分析

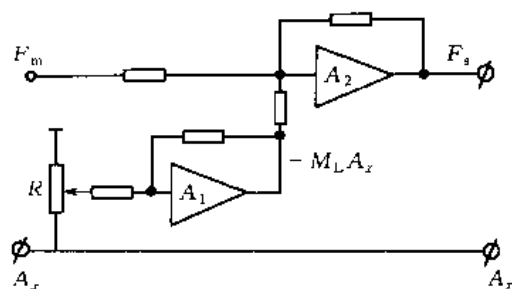


图 2.7-5 质量补偿电路

整可变电位器(可变电阻) \$R\$, 使加法器 \$A_2\$ 的输出信号为零, 说明放大器 \$A_1\$ 的输出正好是 \$-M_L A_x\$。当力传感器与结构联接后测量时, 经过补偿电路的信号即是真实激振力信号。

2.8 冲击试验

冲击试验是单输入单输出模态实验的主要方法之一。与激振器试验相比, 其突出优点是激振设备简单, 不需要支撑装置, 对激振点的选择可以更加随意, 特别适合于现场测试。

冲击试验的激振装置是冲击锤(力锤)。冲击试验分单次冲击和随机冲击两种激励方式。

2.8.1 冲击锤 冲击力谱

冲击锤是 PCB 和辛辛那提大学于 1972 年联合发明的。该产品 1983 年获得美国工业发明 IR-100 奖。

冲击锤一般带力传感器, 用以测量冲击激励信号, 如图 2.8-1 所示。除锤体和锤柄为一体外, 其余部件均可更换。

1. 单次冲击激励力谱

冲击激励是一种脉冲信号。理想的脉冲信号即 \$\delta\$ 函数, 其傅氏谱为一水平直线, 包含所有频率成分。现实中的冲击激励信号是一有限宽度和有限高度的脉冲信号, 如图 2.5-4(a) 所示。脉冲激励信号宽度 \$\tau\$ 表示激励作用时间, 高度 \$A_0\$ 表示冲击力幅值, 曲线下面与 \$t\$ 轴所围面积表示冲击力的冲量。图 2.5-4(b) 为这一脉冲激励的实测频谱。可以看出, 在低频段能量近似均匀分布, 而在高频段能量逐步衰减。可见, 实际冲击激励的力谱总是有限带宽上的频谱, 其有效频带只是低频部分。所以, 冲击激励的高频响应较差。自谱曲线与水平频率轴所围面积表示冲击力输入给结构的总能量。

理论分析时, 冲击力时域信号近似用半个正弦波表示, 即

$$f(t) = \begin{cases} A_0 \sin \frac{\pi}{\tau} t & t \in [0, \tau] \\ 0 & t \in [-\infty, 0] \cup [\tau, \infty] \end{cases} \quad (2.8-1)$$

傅氏变换(即力谱)为

$$s(f) = \frac{4A_0^2 \tau^2 \cos^2 \pi f \tau}{\pi^2 (1 - 4\tau^2 f^2)^2} \quad (2.8-2)$$

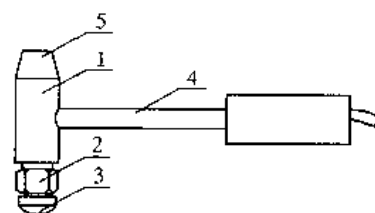


图 2.8-1 带力传感器的冲击锤

1—锤体; 2—力传感器; 3—锤帽; 4—锤柄; 5—附加质量

2. 随机冲击激励力谱

图 2.5-5 为实测随机冲击激励的时间历程和力谱。从时间历程上看,曲线由多个随机脉冲组成,每个力脉冲的宽度近似相等,高度和延续时间均是随机变化的。

理论上,随机冲击激励时域信号看作多个随机变化的半正弦波信号,表达式为

$$f_r(t) = \sum_{i=0}^n A_i \sin \frac{\pi}{\tau} t \quad t \in [t_i, t_i + \tau] \quad (2.8-3)$$

式中 A_i 、 τ 表示第 i 次冲击脉冲的高度和宽度。其力谱的解析式为

$$\begin{aligned} s_r(f) &= \frac{4A_0^2 \tau^2 \cos^2 \pi f \tau}{\pi^2 (1 - 4\tau^2 f^2)^2} \left[\sum_{i=0}^n r_i^2 + \sum_{\substack{i=0 \\ i \neq j}}^n \sum_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n r_i r_j \cos 2\pi f(t_j - t_i) \right] \\ &= s(f) \left[\sum_{i=0}^n r_i^2 + \sum_{\substack{i=0 \\ i \neq j}}^n \sum_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n r_i r_j \cos 2\pi f(t_j - t_i) \right] \end{aligned} \quad (2.8-4)$$

式中, $r_i = \frac{A_i}{A_0}$, t_i, t_j ($i, j = 0, 1, 2, \dots, n$) 为第 i, j 次冲击的作用时刻,它们是随机变量。当 $f \neq 0$ 时 $r_i r_j \cos 2\pi f(t_j - t_i)$ 具有零均值,经多次平均,式(2.8-4)变为

$$\bar{s}_r(f) = s(f) \left(1 + \sum_{i=1}^n r_i^2 \right) \quad (2.8-5)$$

可见,对包含 n 个冲击脉冲的随机冲击激励,力谱 $\bar{s}_r(f)$ 是单次冲击(第一个脉冲)力谱 $s(f)$ 的 $(1 + \sum_{i=1}^n r_i^2)$ 倍,激励能量大大增加。

2.8.2 冲击试验中的输入能量

传统的冲击试验要靠手工操作完成,因此,冲击能量的控制与操作者的经验有很大关系。目前,已有实现冲击激励的自动装置模态冲头(punch)和电动力锤。无论何种方式,冲击试验的能量输入都有一定的规律可循。

1. 单次冲击激励

(1) 影响输入能量的因素

单次力脉冲的能量决定了输入给结构的冲击能量。力脉冲的能量来自冲击锤的动能 $\left(\frac{1}{2} m v^2 \right)$, 决定于冲击锤的质量和速度。精确控制冲击锤的速度较难做到。因此,一般靠调节冲击锤的质量控制输入结构的能量。

冲击锤的质量包括锤体、锤帽、附加质量以及力传感器的质量。根据试验结构不同,应选择不同质量的冲击锤。冲击锤有多种规格,小到二三十克,大到几千克、几十千克。

(2) 影响能量分布的因素

力谱解析式(2.8-2)对 f 求导,得

$$\frac{ds(f)}{df} = \frac{4A_0^2 \tau^3}{\pi^2} \left[\frac{16\tau f \cos^2 \pi f \tau}{(1 - 4\tau^2 f^2)^3} - \frac{\pi \sin 2\pi f \tau}{(1 - 4\tau^2 f^2)^2} \right] \quad (2.8-6)$$

可见,影响冲击能量分布的因素有两个,即脉冲的宽度 τ 和高度 A_0 。 τ 和 A_0 越小,能量分布越平缓;反之,能量变化越大。力脉冲宽度 τ 决定于锤帽与结构的接触刚度。在结构一定的情况下,锤帽越硬即刚度越大,冲击时接触时间越短,力谱越平缓。实际操作时,通过更换不

同材料的锤帽控制力的脉冲宽度 τ 。图 2.8-2 为使用三种刚度的锤帽测得的时间历程和冲击力谱曲线。锤帽的材质通常有钢、铝、尼龙、橡胶及充气锤帽数种。

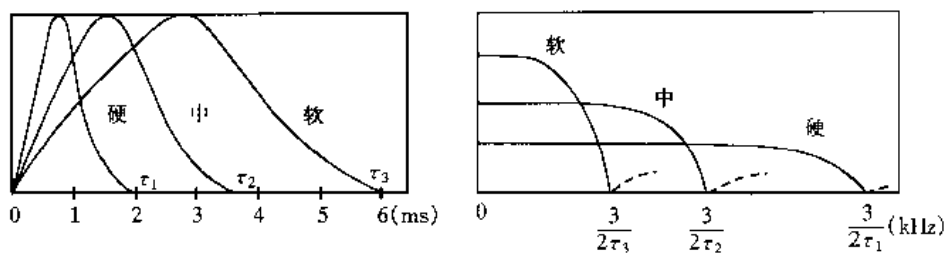


图 2.8-2 使用不同刚度锤帽测得的时间历程及力谱曲线

另一种影响冲击能量分布的因素是力脉冲高度 A_0 ，它主要决定于输入能量的大小。由于控制输入能量的方法主要是控制冲击锤质量，故在相同冲击速度下，冲击锤质量越小，则力脉冲高度 A_0 越小，力谱越平缓。图 2.8-3 给出使用三种不同质量的冲击锤时测得的力谱曲线。

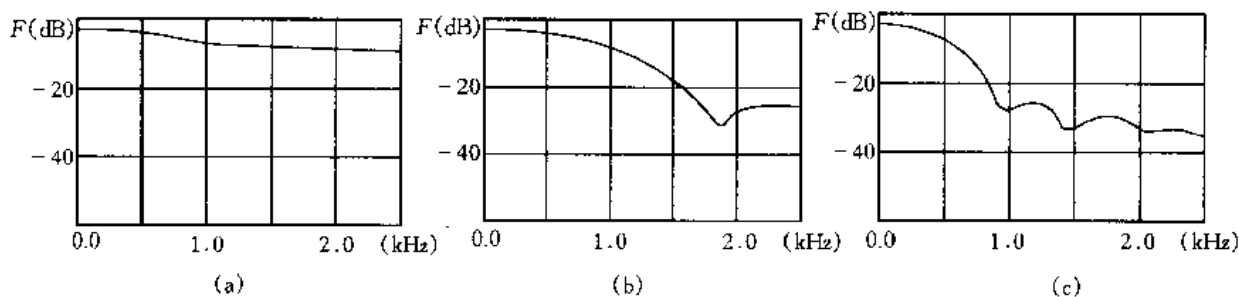


图 2.8-3 使用三种不同质量的冲击锤时的力谱

(a)30 g 锤;(b)80 g 锤;(c)450 g 锤

2. 随机冲击激励

(1) 影响输入能量的因素

随机冲击激励能量决定于一次采样时间内包含力脉冲的总能量。因此，影响随机冲击激励输入能量的因素除冲击锤的质量和速度外，尚与一次采样包含力脉冲的个数有关，由力谱解析式(2.8-5)也可看出。所以，延长采样时间，使包含更多的力脉冲，将大大增加输入给结构的能量，并提高信噪比。比如，每次采样 8~10 个力脉冲，随机冲击激励的力谱幅值是单次冲击的 7 倍多，相当于提高 8 dB，如图 2.8-4 所示。图中 1、2 两条曲线分别表示随机冲击和单次冲击的力谱实测曲线。当然，如果一次采样时间内包含的力脉冲个数较少，则随机冲击和单次冲击的输入能量将差不多。

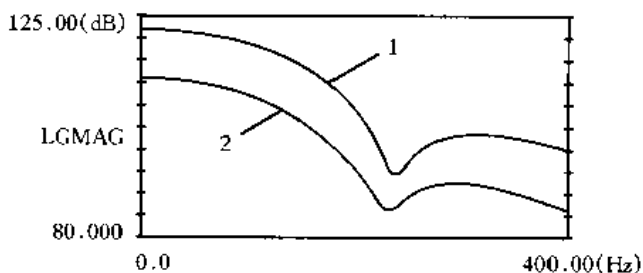


图 2.8-4 随机冲击与单次冲击的力谱

(2) 影响能量分布的因素

随机冲击激励力谱式(2.8-5)对 f 求导，得

$$\frac{d\bar{s}_r(f)}{df} = \frac{4A_0^2\tau^3}{\pi^2} \left[\frac{16\tau f \cos^2 \pi f \tau}{(1-4\tau^2 f^2)^3} - \frac{\pi \sin 2\pi f \tau}{(1-4\tau^2 f^2)^2} \right] \left(1 + \sum_{i=1}^n r_i^2 \right) \quad (2.8-7)$$

由此看出，随机冲击激励能量分布除与冲击锤帽刚度和锤体质量有关外，尚与一次采样包含力

脉冲的个数 n 有关。包含力脉冲的个数越多,则力谱曲线越不平缓。因此,随机冲击激励得到的是较大的输入能量,而失去的是高频特性,即随机冲击试验的高频特性比单次冲击要差。

一般情况下,对固有频率较低的大型结构进行模态实验,采用随机冲击激励较为适合,而单次冲击则无法输入结构足够的能量,导致信噪比降低。另外,随机冲击激励对消除结构非线性因素的影响有一定作用。

2.8.3 冲击试验中需要考虑的几个问题

1. 鉴别试验结构非线性程度

正式试验前,宜用大、中、小三种力度分别锤击试验结构,测量某两点之间的频响函数,对这三种状态下的频响函数进行比较。如果二者基本相同,说明试验结构非线性性质不明显,可采用单次冲击激励方式。否则,宜采用随机冲击或激振器激励进行模态实验。

2. 选择合适的冲击方式

对于一般大小和固有频率在 200 ~ 300 Hz 以下的结构,当非线性性质不明显时,宜采用单次冲击方式;对较大型和固有频率较低的结构,允许有不太强的非线性影响,宜采用随机冲击方式。

3. 选择合适的冲击锤

前述分析可知,冲击激励能量输入与频率范围是矛盾的。一方面,总希望结构能得到足够的激励能量,以提高信噪比。但是,输入能量增大会导致频率范围降低,影响试验的高频特性。因此,选择锤体质量与锤帽刚度是一对矛盾,必须针对实际情况综合考虑:

①尽可能将输入能量集中在所希望的频率范围内,要求此范围内的力谱曲线比较平直,下降(或上升)不超过 10 ~ 20 dB;

②力脉冲的宽度不宜太小,应至少采集到力脉冲主瓣的 4 个数据点。

4. 选择合适的敲击点

与激振器试验一样,敲击点宜选在适当远离振动模态反节点的位置。另外,如果结构各部分刚度变化较大,敲击点宜选在刚度较大的部位。

5. 敲击周期的控制

对单次冲击方式,每次采样包含一个力脉冲,敲击周期即采样时间。每次敲击的力度、延续时间应尽量相同,在一次采样中使信号基本衰减到零为佳。

对随机冲击激励,每次采样包含多个力脉冲。力脉冲的个数视实际情况而定。各次冲击应尽量做到随机性,避免出现周期性。

6. 防止信号过载

若冲击试验靠手工完成,冲击试验中的过载是一个常见问题,要靠经验控制。在预试验中,应反复调整电荷放大器的量程,避免信号过载。

冲击力过大不仅引起测量信号过载,有时还会使结构冲击部位局部变形过大而引起塑性变形。这也是应注意的问题之一。

7. 力传感器与锤帽的影响

由于力传感器与锤帽质量和刚度的影响,导致力传感器测量值与锤帽作用于结构上的力产生一定误差,引起实测频响函数 H_m 与结构真实频响函数 H_1 之间的误差。这一误差用校正系数 $\alpha(f)$ 表示,即

$$H_m = \alpha(f)H_t \quad (2.8-8)$$

校正系数 $\alpha(f)$ 由下述实验确定。

将一标准质量块用细钢丝悬挂起来,如图 2.8-5 所示。质量块材料与试验结构相同。在质量块一端中心位置固定一加速度计,用冲击锤敲击另一端面中心位置。由此测得加速度频响函数 H_c 。此系统零频率频响函数的理论值为

$$H_0 = \frac{A}{F} = \frac{1}{m}$$

式中, A 为加速度; F 为冲击力幅值; m 为质量块质量。由式 (2.8-8), 此系统实测频响函数 H_c 与真实频响函数 H_0 之间的关系为

$$H_c = \alpha_0 H_0$$

则

$$\alpha_0 = \frac{H_c}{H_0} = mH_c \quad (2.8-9)$$

作为试验结构频响函数的校正系数近似值。代入式 (2.8-8), 有

$$H_m = mH_c H_t$$

则

$$H_t = \frac{1}{mH_c} H_m \quad (2.8-10)$$

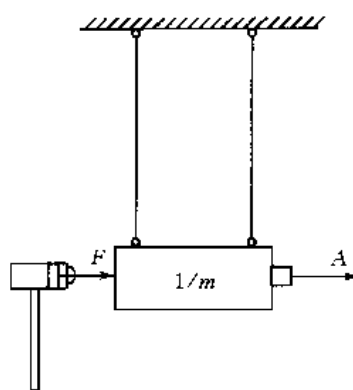


图 2.8-5 冲击校准实验

思 考 题

1. 模态分析实验过程一般分哪几步?
2. 做模态实验时,结构的支撑方式有哪几种? 如何选择?
3. 激励方式有哪几种? 各适于何种情形? 由此得到频响函数的原理是什么?
4. 常用激励装置有哪几种? 常用激励信号有哪几种?
5. 加速度计横向灵敏度含义如何? 如何应用?
6. 测量系统的有效工作频率范围如何确定?
7. 产生噪声的原因有哪几种? 测量中如何处理?
8. 激振器的安装方式有几种?
9. 用激振器激励系统时,如何施加单一方向的激振力?
10. 冲击激励有哪两种? 有何特点?
11. 影响冲击激励能量分布和大小的因素是什么?
12. 做模态实验时,激振点选取原则是什么? 实际测试时如何确定合适的激振点?

第 3 章 动态测试后处理

3.1 引言

在上一章中,通过振动测试基本手段得到了激励和响应的时域信号。这一时域信号通常是足够长的模拟电压信号,是进行模态分析的主要数据,由磁带记录仪记录下来进行离线分析,也可立即进行实时在线分析。后续分析的目的在于,根据实测激励和响应的时间历程,通过一定方法获得测试结构的非参数模型——频响函数或脉冲响应函数。这一过程称为动态测试后处理。

需获得何种非参数模型是由拟采用的参数识别方法决定的。如果用频域法,必须求得系统的频响函数;如果用时域法,有时需要由频响函数求得脉冲响应函数,有时只需自由衰减振动的离散数字信号即可。

动态测试后处理分为模拟式和数字式两种。前者由硬件完成,后者由硬件、软件或软硬件结合来实现。具体的仪器和软件名称很多,但一般统称为频率(频谱)分析仪或频率(频谱)分析系统。模拟式频率分析仪的核心是带通滤波器。由于这类仪器分析速度慢、精度差、功能少,也不能使用软件配合处理,现在已基本淘汰。故这里只介绍数字式频率分析仪或分析系统的基本原理。

数字式频率分析系统常称为动态信号分析系统。事实上,后者所包括的功能更多,使用的范围也更大。数字式频率分析系统使用的基本处理技术包括采样和量化、加窗、FFT、平均、数字滤波、细化等。涉及到的基本问题有采样速率、频率混淆、泄漏、功率谱估计、噪声影响等。了解以上问题,对获得有效的非参数模型有重要意义。

3.2 从无限长连续信号到有限长离散信号的实现过程

无限长连续信号 $x(t)$ 的傅氏变换对为

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt \quad (\text{FT}) \quad (3.2-1)$$

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega) e^{j\omega t} d\omega \quad (\text{IFT}) \quad (3.2-2)$$

如果 $x(t)$ 是非周期信号,则傅氏谱 $X(\omega)$ 是连续谱,如图 3.2-1 所示。非周期连续信号的双边傅氏谱(幅值)是连续谱,包含 $(-\infty, \infty)$ 所有频率成分。

实际测得的激励和响应的时域信号虽不是无限长信号,但也是足够长的连续信号。对这种信号进行处理的第一步是将其数字化。数字化的方法是等间隔采样和量化。等间隔采样简称采样,连续信号每经过一个时间间隔 Δt 进行一次快速启闭,得到一组脉冲序列信号, $f_s =$

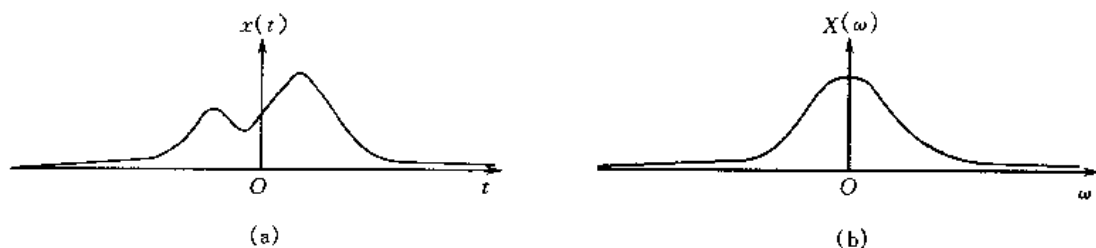


图 3.2-1 非周期连续信号及其傅氏谱

(a)非周期连续时域信号;(b)傅氏谱

$\frac{1}{\Delta t}$ 称为采样频率或采样速率, $\omega_s = 2\pi f_s = \frac{2\pi}{\Delta t}$ 称为采样圆频率。这一脉冲序列信号仍为模拟信号, 必须经过量化, 才能得到离散数字信号。量化就是将采样后的脉冲序列幅值与一组离散电平值比较, 以最接近脉冲序列幅值的电平值代替该幅值, 从而转换成数字序列。这样, 就完成了由连续模拟信号到离散数字信号的转换。显然, 这一转换过程中已存在所谓的量化误差。这一过程是由 A/D 转换器(模数转换器)完成的。离散后的数字信号如图 3.2-2(a)所示。

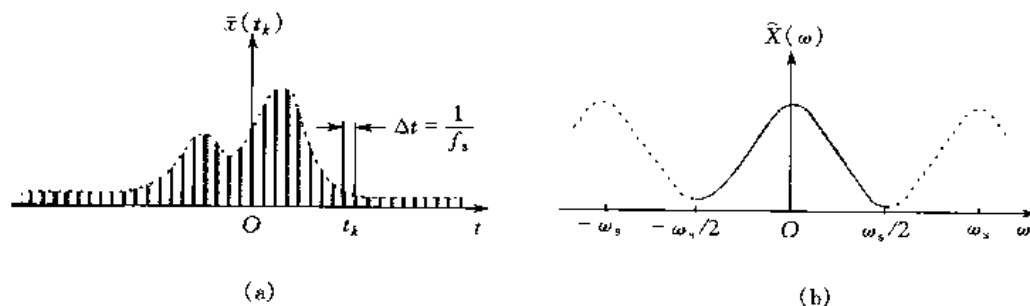


图 3.2-2 无限长数字序列信号及其傅氏谱

(a)无限长数字序列信号;(b)连续傅氏谱

可以证明(见下节), 离散后的无限长数字序列信号 $\tilde{x}(t_k)$ 的傅氏谱 $\tilde{X}(\omega)$ 是原信号 $x(t)$ 傅氏谱 $X(\omega)$ 的周期延拓, 且放大为 $X(\omega)$ 的 f_s 倍, 延拓周期亦为 f_s 或 ω_s 。对无限长数字序列信号 $\tilde{x}(t_k)$ 所做傅氏变换称为序列傅氏变换或离散时间傅氏变换(DTFT), 如图 3.2-2(b)所示。其变换对为

$$\tilde{X}(\omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \tilde{x}(t_k) e^{-j\omega t_k} \quad (\text{DTFT}) \quad (3.2-3)$$

$$\tilde{x}(t_k) = \frac{1}{\omega_s} \int_{-\omega_s/2}^{\omega_s/2} \tilde{X}(\omega) e^{j\omega t_k} d\omega \quad (\text{IDTFT}) \quad (3.2-4)$$

无限长连续信号 $x(t)$ 经采样后获得的无限长数字序列信号 $\tilde{x}(t_k)$ 一般不能完全反映原信号的频谱信息。 $\tilde{X}(\omega)$ 在一个周期 ω_s 内与 $X(\omega)$ 除了在数值上差 f_s 倍外, 主要误差在于相邻周期内谱的影响, 使得在两周期相邻处(甚至扩展到整个周期内)出现所谓的频率混叠。只有在一定条件下(满足采样定理), 这一频率混叠所造成的误差才能消除。

至此还不能实现对实际信号的真正处理。因为实际的数字信号分析系统不能实现对无限长离散数字序列的处理, 而只能对有限长数字序列进行分析处理, 即必须对信号进行截断。截断的过程是, 对实测连续信号 $x(t)$ 截取一段长为 T 的信号 $x_T(t)$, 称为样本, $T = N\Delta t$ 称为

样本长度, N 为采样点数。样本信号经过 A/D 转换, 得到离散的有限长数字序列 $\tilde{x}_T(t_k)$, $t_k = k\Delta t$ ($k=0, 1, \dots, N-1$), 如图 3.2-3(a) 所示。由于截断, 对此有限长数字序列信号 $\tilde{x}_T(t_k)$ 所做傅氏变换得到的频谱不再保持周期连续谱, 而是离散的周期序列或周期离散谱, 周期仍为 ω_s , 在一个周期 ω_s 内有 N 条谱线或 N 个谱值 $\tilde{X}_T(\omega_n)$, $\omega_n = n\Delta\omega$ ($n=0, 1, \dots, N-1$), 如图 3.2-3(b) 所示。易知 $\Delta\omega = \frac{2\pi}{T}$, 称为频率分辨率。对样本信号 $\tilde{x}_T(t_k)$ 所做傅氏变换称为离散傅氏变换(DFT)。其傅氏变换对为

$$\tilde{X}_T(\omega_n) = \sum_{k=0}^{N-1} \tilde{x}_T(t_k) e^{j2\pi kn/N} \quad (\text{DFT}) \quad (3.2-5)$$

$$\tilde{x}_T(t_k) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{X}_T(\omega_n) e^{j2\pi kn/N} \quad (\text{IDFT}) \quad (3.2-6)$$

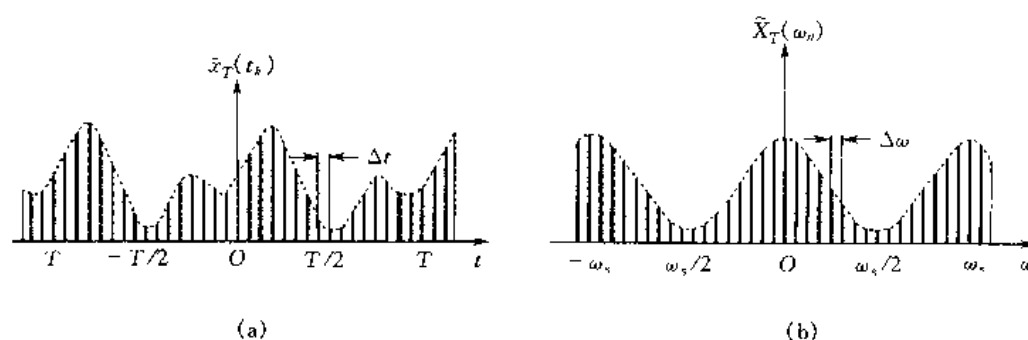


图 3.2-3 有限长数字序列信号及其傅氏谱
(a)有限长数字序列;(b)离散周期谱

对有限数字序列所做离散傅氏变换得到的频谱相当于对序列傅氏变换所得频谱的频域离散采样。因此, 离散傅氏变换所得频谱除了秉承序列傅氏变换所得频谱的全部误差外, 还增加了时域截断带来的截断误差。只有在一定条件下, 这一截断误差才能消除。

离散傅氏变换真正实现了对实际信号的数字处理, 但对一个含 N 个数字序列的样本进行离散傅氏变换需要 N^2 次复数乘法和 $N(N-1)$ 次复数加法运算, 运算量十分庞大。因此, 在 1965 年快速傅氏变换(FFT)被提出以前, 离散傅氏变换尚未进入实用阶段。1965 年由 J. W. Cooley 和 J. W. Tukey 提出的“有限离散序列傅里叶变换的快速算法”即“快速傅里叶变换(FFT)”, 巧妙地利用了复指数函数的周期性和对称性, 大大减少了离散傅氏变换的计算工作量, 使这种算法在数字信号处理中迅速发展起来并成为信号处理的核心内容。顺便指出, FFT 要求采样点数 $N=2^m$, m 为正整数, 如 $m=10$, $N=1024$ 。

最后提出, 在由无限长连续信号到有限长离散信号并进行离散傅氏变换的过程中, 即使没有量化误差、频率混叠和截断误差, 最后所得离散谱值仍为原连续谱相应谱值的 f_s 倍。这种差异对频响函数的结果并无影响, 只要对激励和响应作相同采样和截断即可。

3.3 采样、采样定理和混频现象

从本节开始, 详细阐述上一节内容的各个环节, 目的是引出信号处理中造成各种误差的现象和机理, 并提出消除或减少这些误差影响的相应措施。这些内容在大部分信号分析的文献

中都有介绍。这里之所以重提,是因为它们在模态实验分析中有重要意义。

进行数字信号处理的第一步是对连续模拟信号的离散化(即采样)。离散化本身一般会带来频率混叠误差。为了讨论方便,先不考虑对信号的截断,即只讨论理想情况下对无限长连续信号进行采样过程中所带来的混叠误差和治理措施。

设无限长连续信号 $x(t)$ 如图 3.2-1(a) 所示。对其离散化得到无限长离散信号 $\tilde{x}(t_k)$ 如图 3.2-2(a) 所示。这一过程的数学描述为

$$\tilde{x}(t_k) = x(t) \tilde{\delta}(t_k) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(t) \delta(t - k\Delta t) \quad (3.3-1)$$

式中

$$\tilde{\delta}(t_k) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - k\Delta t) \quad (3.3-2)$$

为单位脉冲序列,由在 $k=0, \pm 1, \pm 2, \dots$ 各点处的单位脉冲按 Δt 等间隔排列所组成的序列,如图 3.3-1(a) 所示。单位脉冲序列 $\tilde{\delta}(t_k)$ 的傅氏谱 $\tilde{\Delta}(\omega_n)$ 仍为脉冲序列,但其谱值为 ω_s , 谱线间隔为 ω_s , 如图 3.3-1(b) 所示。

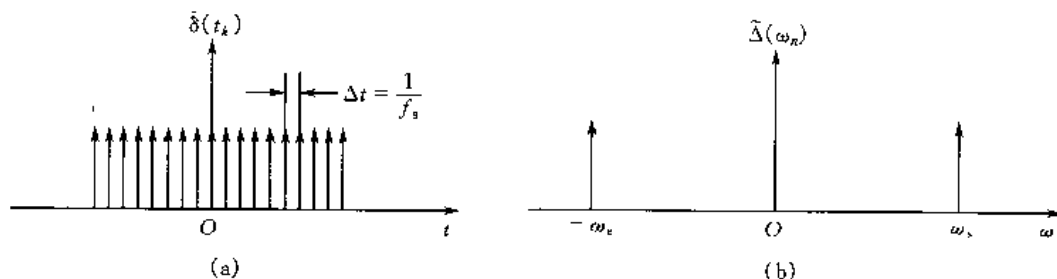


图 3.3-1 单位脉冲序列及其谱

(a) 单位脉冲时间序列; (b) 脉冲谱序列

单位脉冲序列 $\tilde{\delta}(t_k)$ 的傅氏谱可以写成

$$\tilde{\Delta}(\omega_n) = \omega_s \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - n\omega_s) \quad (3.3-3)$$

设无限长连续信号 $x(t)$ 的傅氏谱为 $X(\omega)$ 。根据卷积定理,由式(3.3-1), $\tilde{x}(t_k)$ 的傅氏谱 $\tilde{X}(\omega)$ 应为

$$\begin{aligned} \tilde{X}(\omega) &= \frac{1}{2\pi} X(\omega) * \tilde{\Delta}(\omega_n) \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\Omega) \omega_s \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - \Omega - n\omega_s) d\Omega \\ &= \frac{\omega_s}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} X(\Omega) \delta(\omega - n\omega_s - \Omega) d\Omega \\ &= f_s \sum_{n=-\infty}^{\infty} X(\omega - n\omega_s) \end{aligned} \quad (3.3-4)$$

可见,无限长离散信号 $\tilde{x}(t_k)$ 的傅氏谱为原信号 $x(t)$ 傅氏谱 f_s 倍的周期延拓,延拓周期为 ω_s , 如图 3.2-2(b) 所示。

如果原信号 $x(t)$ 中包含的最高频率成分 $\omega_m > \frac{\omega_s}{2}$, 则在离散信号谱 $\tilde{X}(\omega)$ 中相应周期的

谱会出现重叠,如图 3.3-2(a)所示。这种现象称为频率混叠或混频。反之,如果 $\omega_m \leq \frac{\omega_s}{2}$, 或

$$\omega_s \geq 2\omega_m \quad (3.3-5)$$

即采样频率大于等于分析信号中最高频率成分的两倍,或在分析信号最高频率成分一个周期内至少采样两点,则采样后离散信号频谱中不会出现频率混叠,如图 3.3-2(b)所示。这就是采样定理或称均匀采样定理。称

$$\omega_N = \frac{\omega_s}{2} \quad (3.3-6)$$

为混叠频率或 Nyquist 频率。故采样定理又可叙述为:如果分析信号中最高频率成分 ω_m 不超过混叠频率,则不出现频率混叠。

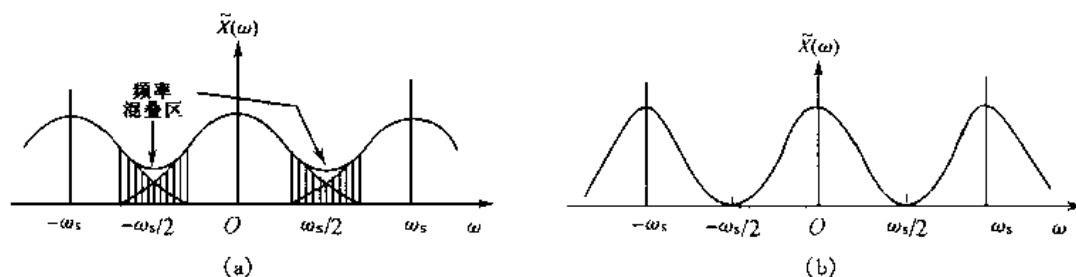


图 3.3-2 频率混叠现象

(a) $\omega_m > \frac{\omega_s}{2}$ 出现频率混叠; (b) $\omega_m \leq \frac{\omega_s}{2}$ 不出现频率混叠

图 3.3-3 中的例子进一步从时域信号重构的角度说明了频率混叠现象。图 3.3-3(a) 中信号在一个周期内采样 8 次,即 $\omega_s = 8\omega_m$ 。采样信号能重构原信号,即不出现频率混叠。图 3.3-3(b) 中在 7 个周期内采样 8 次,即 $\omega_s = \frac{8}{7}\omega_m$ 。采样信号不能重构原信号,出现频率混叠,即采样信号不能保持原信号的频谱特性。

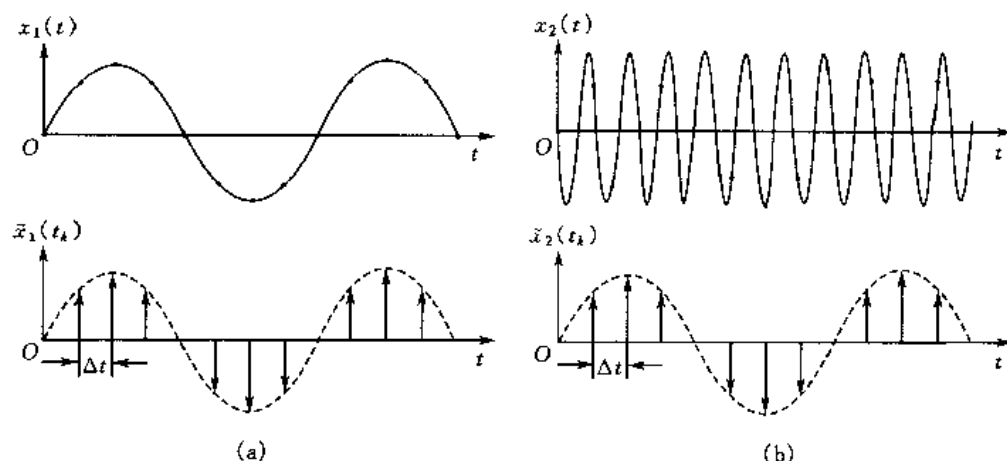


图 3.3-3 从时域信号重构看频率混叠

(a) $\omega_s = 8\omega_m$ 无频率混叠; (b) $\omega_s = \frac{8}{7}\omega_m$ 有频率混叠

由采样定理知,消除频率混叠的途径有两种:

①提高采样频率 ω_s 即缩小采样时间间隔 Δt , 使 $\omega_s \geq 2\omega_m$ 。然而实际的信号处理系统不可能达到很大的采样频率, 处理不了很多的数据。另外, 许多信号本身可能包含 $0 \sim \infty$ 的频率成分, 不可能将采样频率提高到 ∞ 。所以, 靠提高采样频率避免频率混叠是有限制的。事实上, 每一种信号处理系统都有一个确定的采样频率上限。

②采用抗混滤波器。在采样频率 ω_s 一定的前提下, 通过低通滤波器滤掉高于 $\omega_N = \frac{\omega_s}{2}$ 的信号频率成分, 通过低通滤波的信号则可避免出现频率混叠。此处低通滤波器的作用起到抵抗混频作用, 故称为抗混滤波器。

抗混滤波的实际意义不仅在于能有效避免频率混叠, 还在于大部分问题所关心的频率成分是有限的, 高频成分对实际问题并无意义。因此, 滤掉信号中的高频成分对后续信号处理提供了方便。当然, 信号分析系统的最高采样频率决定了信号处理的最高频率分量。

抗混滤波有两种形式。一种是模拟滤波, 用于信号采样之前, 一般由独立的多通道低通滤波器完成; 另一种是数字滤波, 用于信号采样之后, 由信号分析系统中的数字滤波部分完成, 该数字滤波还用于信号的选带分析(见 3.6 节)。

在理想滤波情形下, 滤掉高于 Nyquist 频率的信号成分, 可不产生频率混叠。然而, 实际的滤波器都不具备理想滤波特性, 如图 3.3-4 所示。因此, 通过抗混滤波器的信号中仍有高于 ω_N 的信号通过, 仍会出现混频现象。所以, 实际处理时一般应使滤波器截止频率取为信号的最高频率, 即 ω_m

$$= \left(\frac{1}{4} \sim \frac{1}{2.5} \right) \omega_s, \text{ 或使采样频率满足}$$

$$\omega_s = (2.5 \sim 4.0) \omega_m \quad (3.3-7)$$

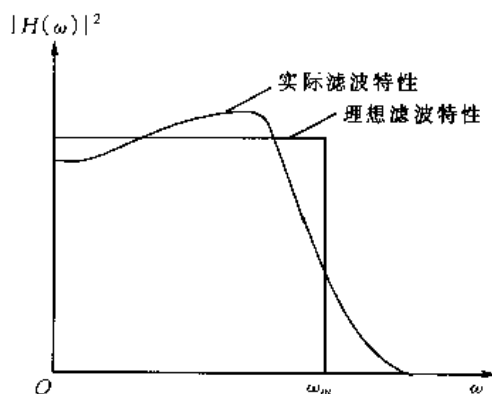


图 3.3-4 滤波器特性

3.4 泄漏和窗函数

如前所述, 数字信号处理中有实际意义的是对无限长连续信号截断后所得有限长信号进行处理。截断信号, 即截取测量信号中的一段信号, 一般会带来截断误差, 截取的有限长信号不能完全反映原信号的频率特性。具体地说, 会增加新的频率成分, 并且使谱值大小发生变化, 这种现象称为频率泄漏。从能量角度来讲, 这种现象相当于原信号各种频率成分处的能量渗透到其他频率成分上, 所以又称为功率泄漏。

理解泄漏最直观的例子是, 直流信号 $\bar{x}(t)$ 的频谱是位于零频率处的 δ 函数 $\delta(\omega)$, 如图 3.4-1(a) 所示。当截取其中一段长为 T 的信号 $\bar{x}_T(t)$ 后, 其傅氏谱变为覆盖整个频率轴上的连续谱, 如图 3.4-1(b) 所示, 即原信号零频率处的能量泄漏到整个频率轴上。如果将信号视为力信号, 原信号相当于常力, 而截断信号相当于矩形脉冲力, 两种信号的性质显然不同。

为了讨论方便, 先不考虑对截断信号的离散化, 即只考虑对无限长连续信号的截断。

从数学意义上讲, 无限长连续信号的截断相当于用一高度为 1 宽度为 T 的矩形窗函数 $w(t)$ 去乘原信号 $x(t)$, 则截断信号 $x_T(t)$ 及其傅氏谱 $X_T(f)$ 为

$$x_T(t) = x(t)w(t) \quad (3.4-1)$$

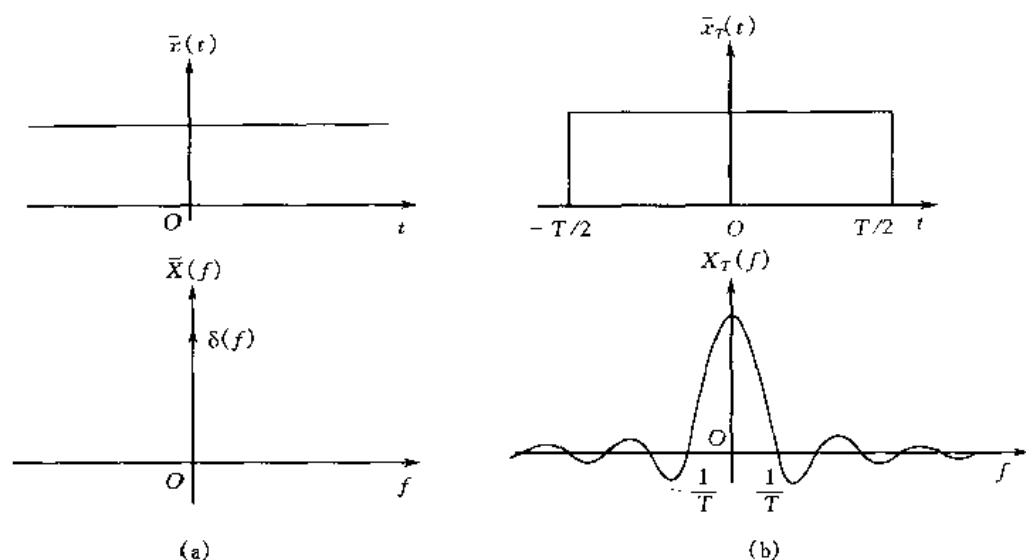


图 3.4-1 泄漏现象的简单例子

(a) 直流信号及其傅氏谱; (b) 截断信号及其傅氏谱

$$X_T(f) = X(f) * W(f) \quad (3.4-2)$$

式中 $X(f) = \mathcal{F}[x(t)]$, $W(f) = \mathcal{F}[w(t)]$ 。

以余弦信号为例。余弦信号 $x(t) = A \cos(2\pi f_0 t)$ 的傅氏谱

$$X(f) = \frac{A}{2} [\delta(f - f_0) + \delta(f + f_0)] \quad (3.4-3)$$

如图 3.4-2(a) 所示。矩形窗函数

$$w(t) = \begin{cases} 1 & |t| \leq \frac{T}{2} \\ 0 & |t| > \frac{T}{2} \end{cases} \quad (3.4-4)$$

的傅氏谱为

$$W(f) = T \frac{\sin(\pi T f)}{\pi T f} \quad (3.4-5)$$

如图 3.4-2(b) 所示。二者时域信号乘积

$$x_T(t) = x(t)w(t) = \begin{cases} A \cos(2\pi f_0 t) & |t| \leq \frac{T}{2} \\ 0 & |t| > \frac{T}{2} \end{cases} \quad (3.4-6)$$

即截取长为 T 的余弦信号。其傅氏谱(图 3.4-2(c))

$$X_T(f) = X(f) \cdot W(f) = \frac{1}{2} A T \left[\frac{\sin \pi T (f + f_0)}{\pi T (f + f_0)} + \frac{\sin \pi T (f - f_0)}{\pi T (f - f_0)} \right] \quad (3.4-7)$$

由此看出,截断后余弦信号的频谱由截断前信号位于 $\pm f_0$ 的单一频谱变成了位于 $\pm f_0$ 附近的连续频谱,且分布于整个频率轴上。这就是加矩形窗后产生的泄漏现象。

对具有宽频带的无限长连续信号,截断后的泄漏现象如图 3.4-3 所示。由于矩形窗的作用,使截断后信号的频谱出现所谓的“纹波现象”。

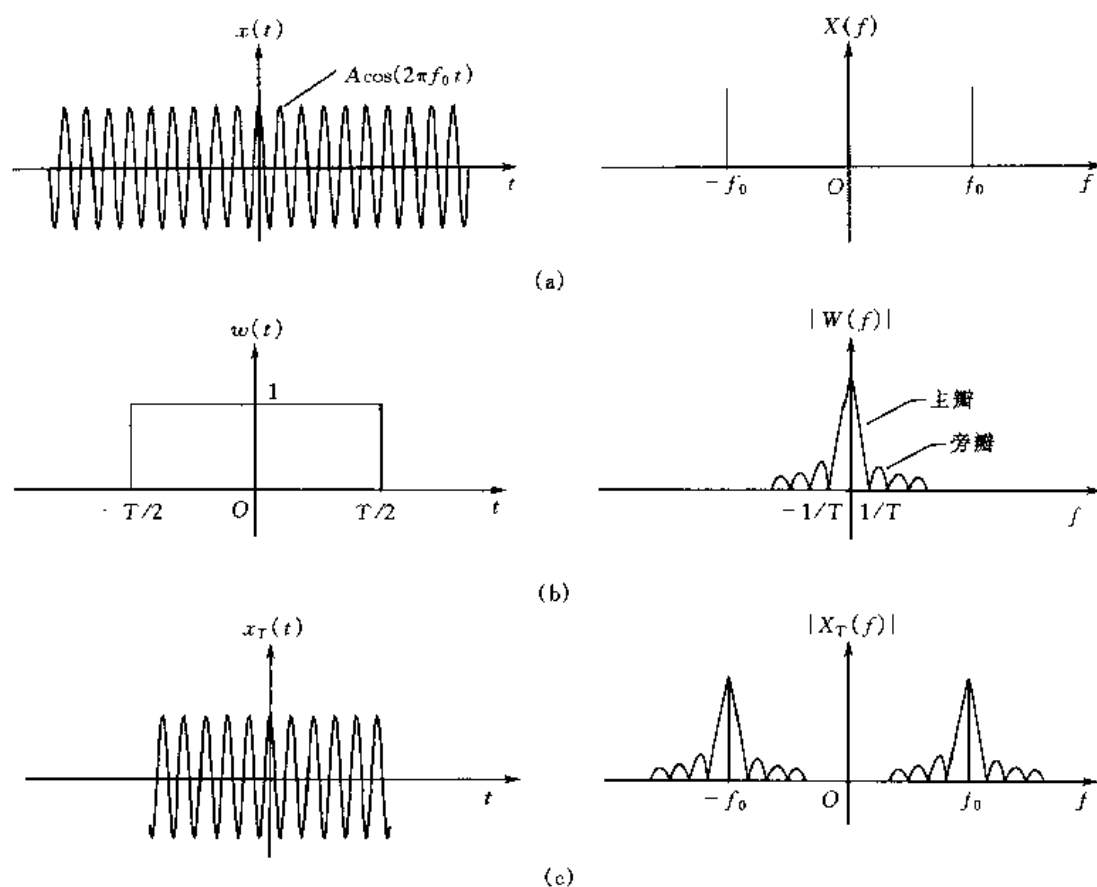


图 3.4-2 余弦信号截断过程及泄漏现象

(a)余弦函数及其傅氏谱;(b)矩形窗函数及其傅氏谱;(c)截断余弦信号及其傅氏谱

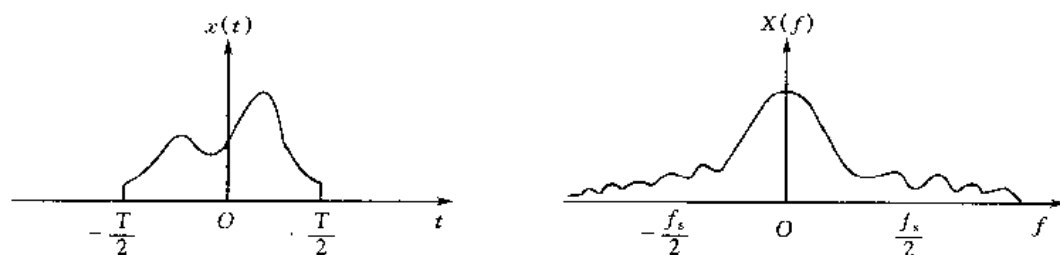


图 3.4-3 泄漏和皱波现象

由上述分析可知,泄漏是由于对无限长信号的突然截断造成的。因此,自然想到,如果能改变这种突然截断方式,泄漏会得到改善。选择异于矩形窗的适当窗函数,对所取样本函数进行不等权处理,便是一种有效的措施。

为了保证加窗后信号的能量不会改变,要求窗函数与时间轴所围面积与矩形窗面积 T 相等。即对任意窗函数 $w(t)$,要求

$$\int_0^T w(t) dt = T \quad (3.4-8)$$

事实上,前述分析是针对一般稳态信号的,如随机信号、周期信号等。在实验模态分析中,常用信号还有瞬态信号。因此,对不同类型的信号,在截断处理中所用窗函数亦不相同。对稳

态信号,常用窗函数有汉宁窗(Hanning Window)、凯塞—贝塞尔窗(Kaiser-Bessel Window)以及平顶窗(Flat Top Window);对瞬态响应信号有指数窗;对瞬态激励信号有力窗。下面介绍这几种常用的窗函数。

3.4.1 用于稳态信号的窗函数

(1)汉宁窗

$$w(t)=1-\cos\frac{2\pi}{T}t\quad (0\leq t\leq T)\tag{3.4-9}$$

(2)凯塞—贝塞尔窗

$$w(t)=1-1.24\cos\frac{2\pi}{T}t+0.244\cos\frac{4\pi}{T}t-0.003\,05\cos\frac{6\pi}{T}t\quad (0\leq t\leq T)\tag{3.4-10}$$

(3)平顶窗

$$\begin{aligned}w(t)=1-1.93\cos\frac{2\pi}{T}t+1.29\cos\frac{4\pi}{T}t-0.388\cos\frac{6\pi}{T}t\\+0.032\,2\cos\frac{8\pi}{T}t\quad (0\leq t\leq T)\end{aligned}\tag{3.4-11}$$

三种窗函数与矩形窗的时域图形与幅值谱如图 3.4-4、图 3.4-5 所示。主要频谱参数见表 3.4-1。

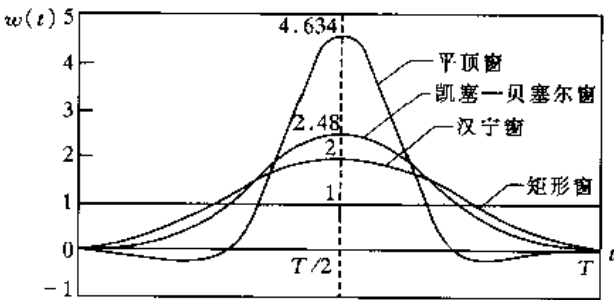


图 3.4-4 四种窗函数的时域图形

表 3.4-1 四种窗函数的主要频谱参数

窗函数	主瓣有效噪声带宽 (1/T)或(Δf)	主瓣 3dB 带宽 (1/T)或(Δf)	旁瓣最大值 (dB)	旁瓣滚降率 (dB/Decade)
矩形窗	1	0.89	-13.3	20
汉宁窗	1.50	1.44	-31.5	60
凯塞—贝塞尔窗	1.80	1.71	-66.6	20
平顶窗	3.77	3.72	-93.6	0

从窗函数的时域图形 3.4-4 看出,矩形窗在[0,T]内的权重均为 1,而其他三种窗函数在[0,T]内的权重是变化的,在两端的权重最小为零。这种不等权处理使得原信号在截断处时域幅值为零,如图 3.4-6 所示。从窗函数的频域图形 3.4-5 及表 3.4-1 看出,矩形窗函数的主瓣虽然较窄,然而旁瓣却很高。其余三种窗函数的旁瓣都有很大程度的降低,但主瓣却加宽了。图 3.4-6 所示余弦信号加汉宁窗后亦有同样结果。一般来讲,主瓣变宽所造成的泄漏是次要的,而旁瓣变高所造成的泄漏是主要的,它能导致较严重的皱波效应。因此,加窗减少泄漏的副作用是增加了主瓣宽度,但总的效果得到改善。

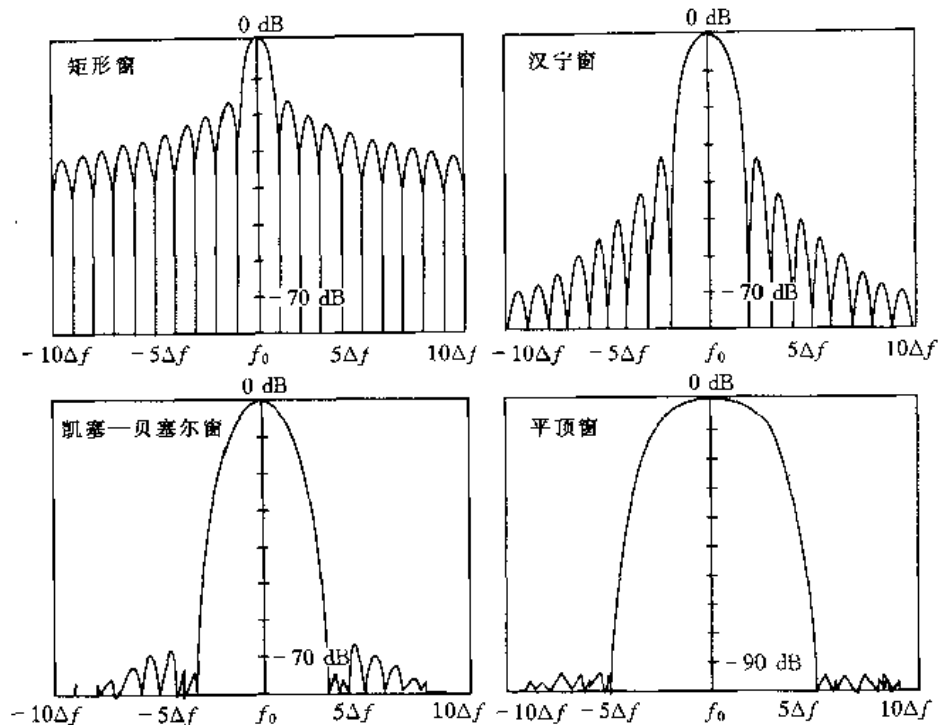


图 3.4-5 四种窗函数的幅值谱

值得提出,加窗虽然使原信号时域波形发生较大变化,但却更有效地保留了原信号的频率信息。

3.4.2 用于瞬态信号的窗函数

瞬态时域信号与稳态时域信号有着重要差别。瞬态时域信号本身不是无限长信号,在有限时间内能衰减至零。如果一次采集样本能覆盖整个衰减过程,则截断信号与原信号没有任何差别。这种信号称为自加窗信号。显然这种信号截断后不会带来泄漏误差,这是重要优点之一。

然而,进一步考察瞬态响应信号,如果阻尼较小,自由衰减时间较长,一次采集样本时间内信号不能衰减至零,截断信号仍会带来泄漏。为此,在截断时可人为给信号加上“阻尼”,使截断信号在末尾近乎衰减至零,这一过程由加指数窗实现。

对瞬态激励信号,主要信号为作用时间很短的猝发信号(冲击脉冲、随机猝发、扫频正弦猝发等),之后一般总伴随均值不为零的噪声信号。采用加力窗的方法,可消除这些噪声的影响。

(1) 指数窗

指数窗的窗函数为

$$w(t) = e^{-\alpha t} \quad (3.4-12)$$

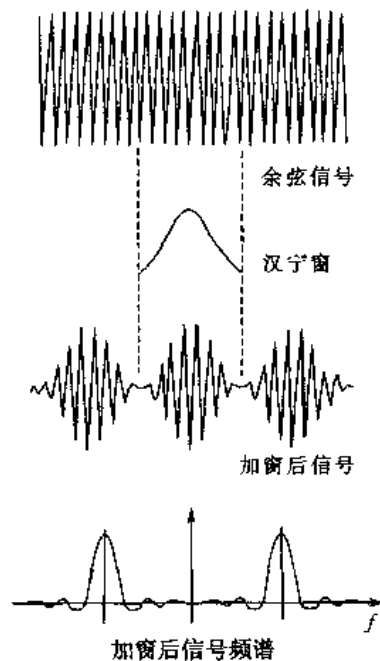


图 3.4-6 余弦信号加窗过程及效果

式中 w 称为指数窗的衰减指数。

设瞬态响应信号为

$$x(t) = \sum_{i=1}^N D_i e^{-\sigma_i t} \sin(\omega_{di} t + \theta_i) \quad (3.4-13)$$

加指数窗后的信号

$$x_T(t) = \sum_{i=1}^N D_i e^{-(\sigma_i + w)t} \sin(\omega_{di} t + \theta_i) \quad (3.4-14)$$

加指数窗的效果如图 3.4-7 所示。

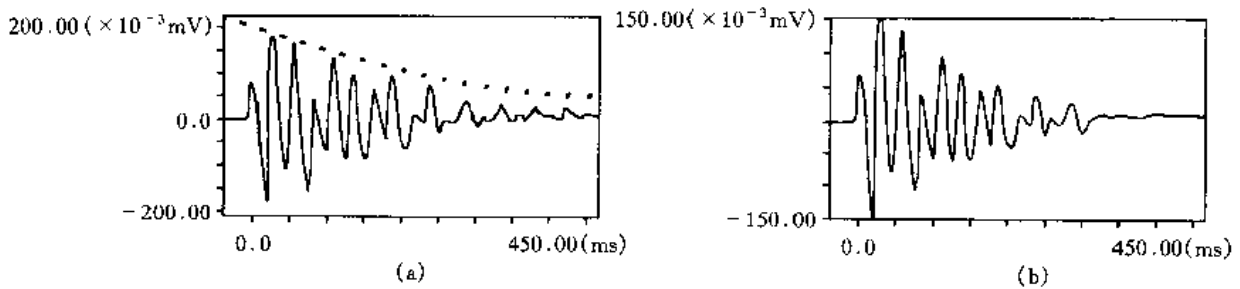


图 3.4-7 指数窗的效果

(a)加窗前;(b)加窗后

利用加指数窗的瞬态响应信号及相应激励信号求得频响函数,进一步识别出衰减系数后,应从中减去指数窗的衰减指数 w ,才是试验结构真实的衰减系数。

(2)力窗

力窗是用于瞬态激励信号的窗函数。对冲击脉冲信号,可采用截短的矩形窗

$$w(t) = \begin{cases} 1 & 0 \leq t \leq T_1 \\ 0 & T_1 < t \leq T \end{cases} \quad (3.4-15)$$

矩形窗的宽度 T_1 为包含力脉冲宽度 τ 的作用时间,如图 3.4-8(a)所示。

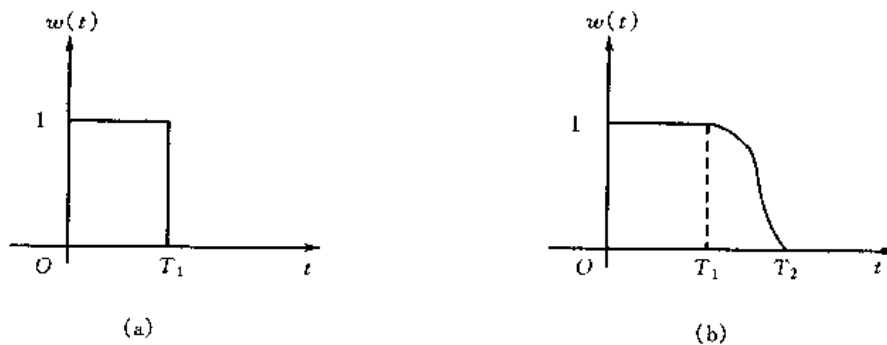


图 3.4-8 力窗

(a)截短的矩形窗;(b)组合力窗

对其他类型的瞬态激励信号(随机猝发、扫频正弦猝发等),可采用由截短矩形窗和半个余弦窗组成的组合力窗

$$w(t) = \begin{cases} 1 & 0 \leq t \leq T_1 \\ \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos \frac{\pi}{T_2 - T_1} (t - T_1) & T_1 < t \leq T_2 \\ 0 & T_2 < t \leq T \end{cases} \quad (3.4-16)$$

式中, T_1 为矩形窗的宽度, 约等于瞬态激励的猝发时间; $T_2 - T_1$ 为半个余弦窗的宽度, 覆盖猝发后衰减过程, 如图 3.4-8(b) 所示。

最后指出, 除上述介绍的窗函数外, 许多现代动态数字分析系统还允许用户自定义窗函数, 以达到不同的分析目的。

3.5 离散傅里叶变换

离散傅里叶变换是数字信号处理的核心。它不仅存在与无限长连续函数傅里叶变换同样完美对称的数学形式, 更存在对有限序列信号处理的实用性及易实现计算的快速算法 FFT。因此, 对离散傅里叶变换基本性质特别是与无限长连续信号傅里叶变换关系的讨论显得尤为重要。

关于推导和解释有限序列离散傅里叶变换的存在性有若干种观点, 其中两种对理解离散傅里叶变换有重要意义。一种是从傅里叶变换的积分表达式直接推导出离散傅里叶变换的和式表达式, 这种方法给出了离散傅里叶变换所得频谱与原连续信号傅氏谱之间的数值关系; 另一种是从无限长离散周期序列的傅里叶级数表达式给出离散傅里叶变换的表达式, 亦即对有限时间序列的周期延拓所得无限长周期序列的频谱即为离散傅里叶变换的频谱, 这一解释给出了离散傅里叶谱的周期性。

为方便起见, 下面推导中的符号略不同于 3.2 节中的符号。

3.5.1 由傅里叶变换推导离散傅里叶变换

一无限长连续信号 $x(t)$ 的傅里叶变换对为

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt \quad (3.2-1)$$

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega) e^{j\omega t} d\omega \quad (3.2-2)$$

今截取其中一段长为 T 的信号 $x_T(t)$, 其有限傅里叶变换对为

$$X_T(\omega) = \int_0^T x_T(t) e^{-j\omega t} dt \quad (3.5-1)$$

$$x_T(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\omega_m}^{\omega_m} X_T(\omega) e^{j\omega t} d\omega \quad (3.5-2)$$

对截断信号 $x_T(t)$ 进行采样离散化, 采样时间间隔 $\Delta t = \frac{T}{N}$, 采样点数为 N 。为方便, 设满足采样定理 $\Delta t \leq \frac{1}{2f_m}$, f_m 为 $x_T(t)$ 包含的最高频率成分, $\omega_m = 2\pi f_m$ 。同时, 对频域 ω 也进行离散,

频率分辨率 $\Delta\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{N\Delta t} = \frac{\omega_s}{N}$ ($\omega_s = 2\pi f_s = \frac{2\pi}{\Delta t}$ 为采样圆频率), 则

时域离散点为

$$t_k = k\Delta t = \frac{kT}{N} \quad (k=0, 1, \dots, N-1) \quad (3.5-3)$$

时域离散信号为

$$\tilde{x}_T(t_k) = \tilde{x}_T(k\Delta t) = \tilde{x}_T(k) \quad (3.5-4)$$

频域离散点为

$$\omega_n = n\Delta\omega = \frac{2\pi n}{T} \quad (n=0, 1, \dots, N-1) \quad (3.5-5)$$

频域离散谱为

$$\tilde{X}_T(\omega_n) = \tilde{X}_T(n\Delta\omega) = \tilde{X}_T(n) \quad (3.5-6)$$

将式(3.5-3)~式(3.5-6)代入式(3.5-1)和式(3.5-2),写成和式形式为

$$\tilde{X}_T(n) = \sum_{k=0}^{N-1} \tilde{x}_T(k) e^{-j\frac{2\pi n}{T} \cdot \frac{kT}{N} \Delta t}$$

即

$$\tilde{X}_T(n) = \Delta t \sum_{k=0}^{N-1} \tilde{x}_T(k) e^{-j2\pi kn/N} \quad (3.5-7)$$

$$\tilde{x}_T(k) = \frac{1}{2\pi} \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{X}_T(n) e^{j2\pi kn/N} \Delta\omega = \frac{\Delta\omega}{2\pi} \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{X}_T(n) e^{j2\pi kn/N}$$

即

$$\tilde{x}_T(k) = \frac{1}{N\Delta t} \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{X}_T(n) e^{j2\pi kn/N} \quad (3.5-8)$$

式(3.5-7)、式(3.5-8)即为有限序列离散傅里叶变换对。为了保持变换对的对称性,以 $\frac{1}{\Delta t} \tilde{X}_T(n)$ 作为离散傅里叶谱,并仍记为 $\tilde{X}_T(\omega_n)$,即

$$\tilde{X}_T(\omega_n) = \frac{1}{\Delta t} \tilde{X}_T(n) \quad (3.5-9)$$

$\tilde{x}_T(k)$ 仍用 $\tilde{x}_T(t_k)$ 表示,则式(3.5-7)、式(3.5-8)即为

$$\tilde{X}_T(\omega_n) = \sum_{k=0}^{N-1} \tilde{x}_T(t_k) e^{-j2\pi kn/N} \quad (3.2-5)$$

$$\tilde{x}_T(t_k) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{X}_T(\omega_n) e^{j2\pi kn/N} \quad (3.2-6)$$

式(3.5-9)说明,由式(3.2-5)表示的离散傅里叶谱是原信号频谱的 $\frac{1}{\Delta t} = f_s$ 倍。

值得注意的是,上述推导离散傅里叶变换的过程虽是由连续傅里叶变换近似得到的,但离散傅里叶变换对式(3.2-5)、式(3.2-6)之间存在着精确的对应关系,它们是精确的变换对。

3.5.2 由无限周期时间序列傅氏级数推导离散傅里叶变换

考察一无限长周期序列 $\tilde{x}(k)$, 周期为 N , 即对任意整数 m , $\tilde{x}(k+mN) = \tilde{x}(k)$ 。显然, 周期序列 $\tilde{x}(k)$ 可以用复指数形式的序列傅里叶级数表示, 傅里叶级数基频为 $\frac{2\pi}{N}$ 。由于复指数 $e^{j2\pi kn/N}$ 是 n 的(以 N 为周期)周期函数, 所以周期序列 $\tilde{x}(k)$ 的傅里叶级数表达式只包含 N

个复指数,即有表达式

$$\tilde{x}(k) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{X}(n) e^{j2\pi kn/N} \quad (3.5-10)$$

式中,系数 $\frac{1}{N}$ 是为了表达方便加上去的。

式(3.5-10)两边乘以 $e^{-j2\pi kr/N}$, r 为整数,并对 k 从0到 $N-1$ 求和,得

$$\sum_{k=0}^{N-1} \tilde{x}(k) e^{-j2\pi kr/N} = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{X}(n) e^{j2\pi(n-r)k/N}$$

变换右端求和次序,有

$$\sum_{k=0}^{N-1} \tilde{x}(k) e^{-j2\pi kr/N} = \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{X}(n) \left[\frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} e^{j2\pi(n-r)k/N} \right] \quad (a)$$

当 N 为偶数时,利用复指数的正交性,有

$$\frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} e^{j2\pi(n-r)k/N} = \begin{cases} 1 & \text{当 } n=r \\ 0 & \text{当 } n \neq r \end{cases} \quad 0 \leq n \leq N-1 \quad (3.5-11)$$

代入式(a),有

$$\sum_{k=0}^{N-1} \tilde{x}(k) e^{-j2\pi kr/N} = \tilde{X}(r)$$

将上式中 r 记为 n ,则得式(3.5-10)傅里叶系数表达式

$$\tilde{X}(n) = \sum_{k=0}^{N-1} \tilde{x}(k) e^{-j2\pi kn/N} \quad (3.5-12)$$

显然,周期序列 $\tilde{x}(k)$ 的傅里叶级数表达式(3.5-10)及其系数表达式(3.5-12)与离散傅里叶变换对式(3.2-5)、式(3.2-6)完全相同。因此,可以认为,对有限序列 $\tilde{x}_T(t_k)$ 所做离散傅里叶变换式(3.2-5),即是将 $\tilde{x}_T(t_k)$ 作周期延拓所得无限长周期序列 $\tilde{x}(k)$ 的傅里叶级数系数表达式(3.5-12)。所以,周期序列 $\tilde{x}(k)$ 傅里叶级数变换对与有限序列 $\tilde{x}_T(t_k)$ 离散傅里叶变换对的性质完全相同。

有了以上解释,可以对泄漏现象有进一步理解。一个无限长连续信号经截断、采样并做离散傅里叶变换后,在一定条件下可以完全消除泄漏现象。这一条件是,如果原信号为周期信号,周期为 T_0 ,截断信号长度 T 恰好为 T_0 的正整数倍,即 $T = mT_0$, m 为正整数,则截断信号之离散傅里叶变换相当于对截断信号离散并作周期延拓所得周期序列的傅里叶级数系数表达式,而这一周期序列相当于对原无限长信号的离散。所以,此时不会产生截断误差。

3.6 选带分析技术

对长为 T 的截断信号进行 N 点采样,采样时间间隔为 $\Delta t = \frac{T}{N}$,采样频率 $f_s = \frac{1}{\Delta t}$ 。经FFT得到周期序列的离散傅里叶谱,周期仍为 N 。考察一个周期内的 N 条谱线,由于傅里叶谱正、负频率域上的对称性,独立的谱线只有 $\frac{N}{2}$ 条。这 $\frac{N}{2}$ 条谱线均匀分布在 $0 \sim \frac{f_s}{2}$ 的频率范围内,频率间隔

$$\Delta f = \frac{f_s}{N} = \frac{1}{N\Delta t} = \frac{1}{T} \quad (3.6-1)$$

假设抗混滤波器具有理想特性,取 $f_s = 2f_m$,则显示的 $\frac{N}{2}$ 条谱线完全没有频率混叠。那么

$$\Delta f = \frac{2f_m}{N} = \frac{f_m}{N/2} = \frac{f_m}{N_d} \quad (3.6-2)$$

式中显示有效(无混频)谱线数 $N_d = \frac{N}{2}$ 。

事实上,抗混滤波器特性均为非理想特性,一般采样频率取

$$f_s = (2.5 \sim 4)f_m$$

则频率间隔

$$\Delta f = \frac{(2.5 \sim 4)f_m}{N} = \frac{f_m}{(0.25 \sim 0.4)N} = \frac{f_m}{N_d} \quad (3.6-3)$$

显示有效谱线数

$$N_d = (0.25 \sim 0.4)N \quad (3.6-4)$$

即显示有效谱线数 N_d 比 $\frac{N}{2}$ 要少。比如,若取 $N = 1024$, $f_s = 4f_m$,则显示有效谱线数为 $N_d = 0.25N = 256$ 。

以上分析称为基带分析,显示有效谱线数为 N_d ,分析频率范围为 $0 \sim f_m$ 。

在许多问题的谱分析中,为了显示详细的谱线分布情况,往往需要较高的频率分辨率,即要求较小的频率间隔 Δf ,特别是经常关心某一频带内的谱分布情况。由式(3.6-3)看出,减小 Δf 的途径是增加 N 或降低 f_m 。如果分析频带 $0 \sim f_m$ 不变,增加采样点数 N ,将会提高频率分辨率。而事实上,受信号分析系统的限制,采样点数 N 不能很大,一般 N 是固定的。所以,如采用基带分析,提高频率分辨率只能靠牺牲分析最高频率 f_m 实现。因此,用基带分析,无法有效地提高频率分辨率。

如果能通过某种途径在不改变 N 和 f_m 的前提下将很小的关心频带 $[f_0 - B, f_0 + B]$ 在整个有效谱线显示范围 $0 \sim N_d$ 上展开或放大,而不是将整个分析频带 $0 \sim f_m$ 展开,无疑会得到一种提高频率分辨率的有效方法。这种分析方法称为选带分析技术,又称为细化 FFT 或 Zoom FFT。下面介绍一种称为 HR-FA 的算法。

HR-FA 算法的基本思想是,将经过抗混滤波并经过采样的信号进行数字移频、数字低通滤波后重新采样(采样率缩减),再进行 FFT 得到 $[-B, B]$ 范围内的高频率分辨率的傅里叶谱,如图 3.6-1、图 3.6-2 所示。下面简要介绍工作原理。

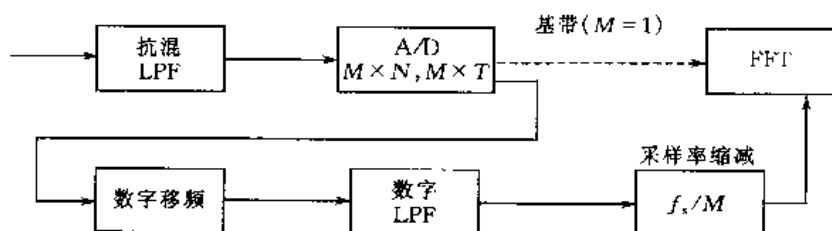


图 3.6-1 选带分析技术

设正常采样和基带 FFT 点数为 N ,即一次采样 N 点后直接进行 FFT,采样速率为 f_s ,采样时间间隔为 Δt ,采样时间为 T 。现在仍保持 Δt 和 f_s 不变,连续采样 M 个样本,每个样本长

T , 点数为 N , 故共采集 $M \times N$ 点, 序列长度为 $M \times T$, 先不进行 FFT。采集的 $M \times N$ 点序列记为 $x(k\Delta t)$ ($k=0, 1, \dots, M \times N-1$)。

将 $x(k\Delta t)$ 乘以 $e^{j2\pi f_0 k\Delta t}$, 记

$$y(k\Delta t) = x(k\Delta t)e^{j2\pi f_0 k\Delta t} \quad (3.6-5)$$

根据数字移频定理(即积分变换中的位移定理), $y(k\Delta t)$ 的傅里叶谱

$$Y(f) = \mathcal{F}[y(k\Delta t)] = X(f - f_0) \quad (3.6-6)$$

相当于将 $X(f)$ 的频谱左移 f_0 , 而谱的形状未变, 如图 3.6-2(b) 所示。

我们并不关心整个 $Y(f)$ 的谱线分布, 而是关心 f_0 附近带宽为 $2B$ 的频带 $[-B, B]$ 内的谱线情况。为此, 对 $y(k\Delta t)$ 进行数字低通滤波, 截止频率为 B 。假设滤波特性为理想的。对具有 $M \times N$ 个点的经过数字低通滤波

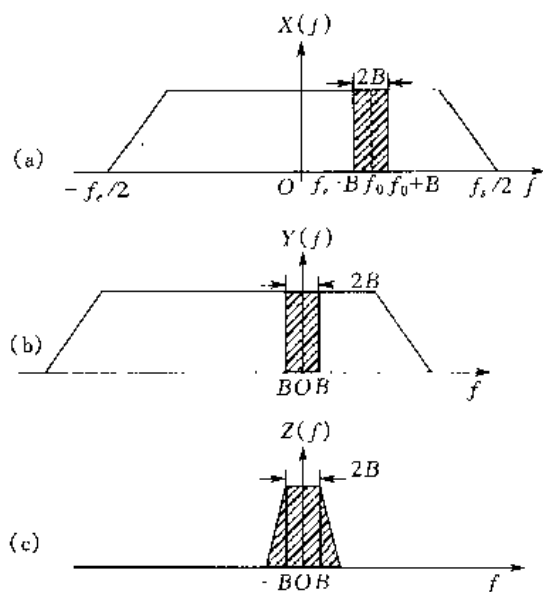


图 3.6-2 数字移频-低通滤波
(a) 关心频带; (b) 数字移频; (c) 数字低通滤波

的 $y(k\Delta t)$ 进行重新采样, 采样时间间隔为 $\Delta t' = M\Delta t$, 采样速率为 $f'_s = \frac{f_s}{M}$ 。由采样定理, 不产生频率混叠的条件是

$$f'_s = \frac{f_s}{M} \geq 2B \quad (3.6-7)$$

这一过程称为采样率缩减, 采样点数仍为 N , 此序列记为 $z(l\Delta t')$ ($l=0, 1, \dots, N-1$)。对 $z(l\Delta t')$ 进行 FFT, 得到 $[-B, B]$ 范围内的 N 条谱线。如考虑理想数字低通滤波, 取 $f'_s = 2B$, 则频率分辨率为

$$\Delta f' = \frac{f'_s}{N} = \frac{f_s}{MN} = \frac{2B}{N} \quad (3.6-8)$$

可见, $\frac{\Delta f'}{\Delta f} = M$, 频率分辨率提高到基带分析的 M 倍。 M 称为细化倍数。

如考虑数字低通滤波的非理想特性, 可取较大的 f'_s 或增大分析带宽, 如取 $f'_s = (2.5 \sim 4)B$, 则显示的有效谱线数

$$N_d = (0.25 \sim 4)N$$

上述过程表明, 选带分析需使用较多的原始采样数据 ($M \times N$ 个), 这就要求信号是平稳的。对随机激励、正弦扫频激励可采用较高的细化倍数。而对于瞬态激励, 则不宜选用较大的细化倍数。

3.7 平均技术

至此, 已讨论了从测量到的无限长连续信号得到离散傅里叶谱的全过程, 并分析了其中可能出现的误差及解决办法。如果同时得到激励和响应信号的傅里叶谱, 可以用第 1 章的定义

求得相应的频响函数。然而,这样求得的频响函数曲线仍然很不光滑(图 3.7-1(a)),原因是测量到的激励和响应信号中都混有大量噪声。

在模态实验中,噪声是指非正常激励及响应。无论激励信号还是响应信号,都有不同程度的噪声污染问题。噪声可能来自试验结构本身、测试仪器及导线、电源或环境影响等。

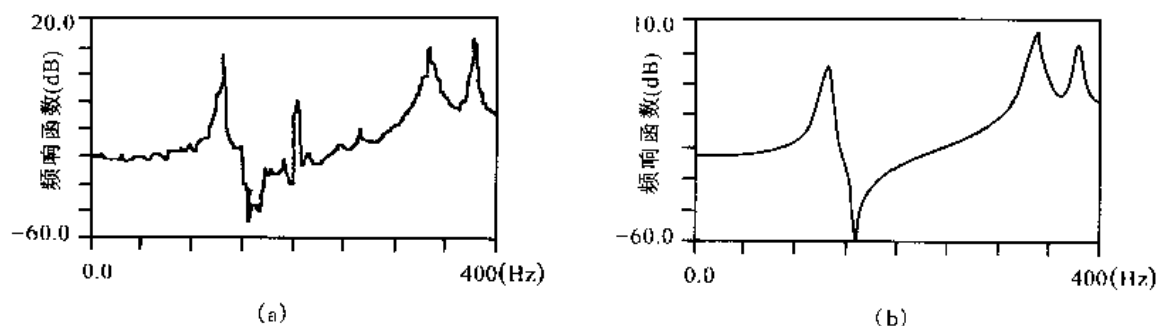


图 3.7-1 受到噪声影响的频响函数及多次平均后的效果

(a)未做平均;(b)平均 100 次

通常在信号测试阶段就已设法做到减少噪声污染,如良好的接地技术等措施。即使如此,测试信号中的噪声仍会存在。在信号处理阶段,通过平均技术可降低噪声的影响。平均技术的前提是认为噪声为随机信号。对周期性噪声,必须通过其他方法解决。

不同类型信号所用平均方法是不同的。对确定性信号,可采用时域平均技术。取多个等长度时域信号样本,采样后对应数据进行平均,可得到噪声较小的有效信号。时域平均的限制条件很严格,如对周期信号,时域平均必须满足两个条件之一:①样本长度为信号周期的正整数倍;②样本初始相位相同。否则,时域平均的结果可能为零。时域平均不仅可消除噪声的偏差,也能消除噪声信号的均值,即在足够多次平均后可完全消除噪声影响,提高信噪比。

使用更普遍的平均技术是频域平均,即对某些频谱做的平均。由于傅里叶谱中包含幅值和相位两种特性,而相位在各次测量中具有随机性,故一般不对傅里叶谱进行平均,而是对进一步得到的功率谱进行平均,再进一步估算频响函数、相干函数、相关函数或其他谱。

进行频域平均的问题是,这种平均只能降低噪声的偏差,而不能减少噪声的均值,即不能提高信噪比。因此,平均后的谱曲线只是趋于光滑,仍包含噪声谱的均值。

本节只讨论频域平均。按照样本截取的方式不同,平均技术有顺序平均和叠盖平均;按照平均时样本权重不同,平均技术有线性平均(稳态平均)和指数平均(衰减平均或动态平均)。

3.7.1 顺序平均和叠盖平均

1. 顺序平均

依次截取时域信号的若干样本,经 FFT 和其他运算,得到所需频域信号后做平均,称为顺序平均。顺序平均所用时域样本互不重叠,如图 3.7-2(a)所示。

2. 叠盖平均

使用 FFT 算法的现代信号分析系统运算速度非常快,完成一个样本的 FFT 及其他谱运算的时间往往比一个样本长度小得多。因此,在完成下一样本采样以前,能完成当前样本的各种变换。这样,可以使用当前样本的后面部分数据及下一样本的前面部分数据作为新样本进行数据变换,即做 FFT 及各种谱运算的时域样本是重叠的。以此为基础进行的平均称为叠盖

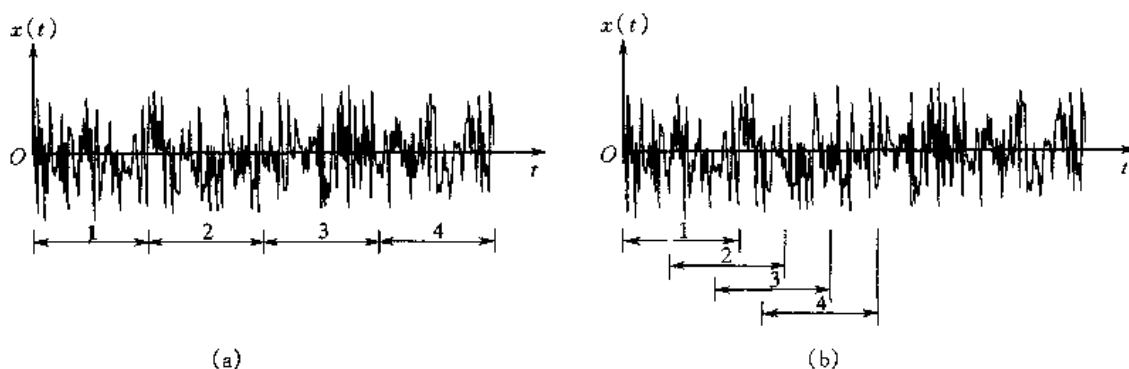


图 3.7-2 顺序平均和叠盖平均

(a) 顺序平均; (b) 叠盖平均

平均,如图 3.7-2(b)所示。

与顺序平均相比,叠盖平均不仅速度快,而且所得谱特性好。这是因为叠盖平均各样本之间的相关程度比顺序平均大,因此所得谱拟合曲线更加光滑。

3.7.2 线性平均和指数平均

1. 线性平均

在做多个样本的谱平均时,各样本所占权重相等,这种平均称为线性平均。线性平均适于稳态信号,因此又称为稳态平均。

设采样得到 m 个样本 $Z_i (i = 1, 2, \dots, m)$, 当前样本为 Z_m , 使用这 m 个样本做第 m 次线性平均所得平均谱集为 A_m , 则

$$A_m = A_{m-1} + \frac{1}{m}(Z_m - A_{m-1}) = \frac{1}{m}[(m-1)A_{m-1} + Z_m] \quad (3.7-1)$$

这就是线性平均的递推公式。易得

$$A_m = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m Z_i \quad (3.7-2)$$

可见,在对 m 个样本所做第 m 次平均中,各样本所占权重相等,均为 $\frac{1}{m}$ 。

2. 指数平均

指数平均适于旋转机械等时变系统中的非稳态信号,故又称动态平均。

指数平均的递推公式为

$$A_m = A_{m-1} + \frac{1}{K}(Z_m - A_{m-1}) = \frac{1}{K}[(K-1)A_{m-1} + Z_m] \quad (3.7-3)$$

式中 K 为事先设好的衰减常数。易得

$$A_m = \frac{1}{K} \sum_{i=1}^m \left[\left(\frac{K-1}{K} \right)^{m-i} Z_i \right] \quad (3.7-4)$$

由式(3.7-3)可知,当前样本 Z_m 在第 m 次平均中所占权重为 $\frac{1}{K}$, 而以往 $m-1$ 个样本所占总权重为 $1 - \frac{1}{K}$ 。若 $K < m$, 显然当前样本所占权重大于以往各样本所占权重。如取 $K =$

4, 则当前样本权重为 $\frac{1}{4}$, 以往 $m-1$ 个样本总权重为 $1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$ 。由式(3.7-4)进一步看出, 第 i 个样本所占权重为 $\frac{1}{K} \left(\frac{K-1}{K} \right)^{m-i}$ 。如 $K=4, m=10$, 则从第 1 到第 10 个样本所占权重为 $\frac{1}{4} \left(\frac{4-1}{4} \right)^9, \frac{1}{4} \left(\frac{4-1}{4} \right)^8, \dots, \frac{1}{4} \left(\frac{4-1}{4} \right), \frac{1}{4}$, 即权重按指数规律衰减, 且 K 越小, 衰减越快。所以指数平均又称衰减平均。

最后指出两点: ①指数平均的含义是, 使当前及邻近样本所占权重较大, 而远离当前样本所占权重较小, 因此, 指数平均结果反映了最新样本的频谱信息; ②指数平均权因子序列的无限和为 1, 即

$$\sigma_K = \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{K} \sum_{i=1}^m \left(\frac{K-1}{K} \right)^{m-i} = 1$$

所以, 对有限次数的平均结果, 比单个样本的谱值要小。这并不影响频响函数的估计, 但影响功率谱的谱值。由于权因子序列呈指数变化, 当平均次数 m 不是很大时, 这种误差并不很大。如取 $K=4$, 当 $m=10$ 时, $\sigma_K=0.9437$; 当 $m=15$ 时, $\sigma_K=0.9866$ 。

在模态分析的频响函数估计中, 线性平均较指数平均用得更多。

3.8 噪声对频响函数估算形式的影响

在通过 FFT 及平均技术求得激励和响应的自谱和互谱后, 进一步可估算被测结构的频响函数和相干函数。针对不同的噪声影响, 选择适当的频响函数估算形式, 可达到最佳估计。

1.7 节曾给出单点随机激励方式下频响函数的三种估算形式(1.7-36)、式(1.7-37)和式(1.7-38)。事实上, 对其他激励方式, 这三种估算形式仍然成立。本节讨论单点激励方式下噪声对这三种估算形式的影响。

频响函数的三种估算形式如下:

$$\text{第一估算式} \quad H_1(\omega) = \frac{G_{fr}(\omega)}{G_{ff}(\omega)} \quad (1.7-36)$$

$$\text{第二估算式} \quad H_2(\omega) = \frac{G_{xr}(\omega)}{G_{xf}(\omega)} \quad (1.7-37)$$

$$\text{第三估算式} \quad |H_s(\omega)|^2 = \frac{G_{sx}(\omega)}{G_{ff}(\omega)} \quad (1.7-38)$$

为方便, 式中功率谱可理解为双边功率谱的平均值。

在没有噪声污染的理想情况下, 这三种估算形式等价。实际由于噪声影响, 三种估算形式有所差异。下面将按三种噪声污染情况讨论这三种估算形式与真值的差别。

另外, 人们还提出若干其他估算形式, 如 H_c 、 H_z 、 H_b 等估算形式。特别是一些无偏估计日益受到重视, 在本节最后介绍。

3.8.1 只有响应信号受到噪声污染(输出端噪声影响)

如图 3.8-1 所示, 如果只有响应信号 $x(t)$ 受到噪声 $n(t)$ 污染, 并设噪声 $n(t)$ 与激励 $f(t)$ 和响应 $x(t)$ 无关。 $f(t)$ 、 $x(t)$ 和 $n(t)$ 的傅里叶谱分别为 $F(\omega)$ 、 $X(\omega)$ 和 $N(\omega)$, 实测

受到噪声污染的响应信号 $y(t) = x(t) + n(t)$ 的傅里叶谱为

$$Y(\omega) = X(\omega) + N(\omega) \quad (3.8-1)$$

1. 第一估算式

由式(1.7-36)知,第一估算式

$$\begin{aligned} H_1(\omega) &= \frac{G_{fx}(\omega)}{G_{ff}(\omega)} \\ &= \frac{\frac{1}{T}E[F^*(\omega)Y(\omega)]}{G_{ff}(\omega)} \\ &= \frac{\frac{1}{T}[F^*(\omega)X(\omega)] + \frac{1}{T}E[F^*(\omega)N(\omega)]}{G_{ff}(\omega)} = \frac{G_{fx}(\omega) + G_{fn}(\omega)}{G_{ff}(\omega)} \end{aligned}$$

图 3.8-1 只有响应信号受到噪声污染

由于噪声 $n(t)$ 与激励 $f(t)$ 无关,故平均次数足够多时 $G_{fn}(\omega) = 0$, 则

$$H_1(\omega) = \frac{G_{fx}(\omega)}{G_{ff}(\omega)} = H(\omega) \quad (3.8-2)$$

结果表明,只有响应受到噪声污染时,不断增加平均次数得到的频响函数第一估算式 $H_1(\omega)$ 是实际频响函数 $H(\omega)$ 的真估计。

2. 第二估算式

由式(1.7-37)知,第二估算式

$$\begin{aligned} H_2(\omega) &= \frac{G_{yy}(\omega)}{G_{yf}(\omega)} = \frac{\frac{1}{T}E[Y^*(\omega)Y(\omega)]}{\frac{1}{T}E[Y^*(\omega)F(\omega)]} \\ &= \frac{\frac{1}{T}E[X^*(\omega)X(\omega)] + \frac{1}{T}E[N^*(\omega)N(\omega)] + \frac{1}{T}E[X^*(\omega)N(\omega)] + \frac{1}{T}E[N^*(\omega)X(\omega)]}{\frac{1}{T}E[X^*(\omega)F(\omega)] + \frac{1}{T}E[N^*(\omega)F(\omega)]} \\ &= \frac{G_{xx}(\omega) + G_{nn}(\omega) + G_{xn}(\omega) + G_{nx}(\omega)}{G_{xf}(\omega) + G_{nf}(\omega)} \end{aligned}$$

考虑噪声 $n(t)$ 与激励 $f(t)$ 及响应 $x(t)$ 无关,故平均次数足够多时 $G_{xn}(\omega) = G_{nx}(\omega) = G_{nf}(\omega) = 0$, 则

$$H_2(\omega) = \frac{G_{xx}(\omega) + G_{nn}(\omega)}{G_{xf}(\omega)} = H(\omega) \left(1 + \frac{G_{nn}(\omega)}{G_{xx}(\omega)} \right) \quad (3.8-3)$$

式中

$$H(\omega) = \frac{G_{xx}(\omega)}{G_{xf}(\omega)}$$

可见,只有响应受到噪声污染时,不断增加平均次数得到的频响函数第二估算式 $H_2(\omega)$ 是实际频响函数 $H(\omega)$ 的过估计。

3. 第三估算式

由式(1.7-38)知,第三估算式

$$|H_s(\omega)|^2 = \frac{G_{yy}(\omega)}{G_{ff}(\omega)} = \frac{G_{xx}(\omega) + G_{mm}(\omega) + G_{mx}(\omega) + G_{nx}(\omega)}{G_{ff}(\omega)}$$

当平均次数足够多时, $G_{mx}(\omega) = G_{nx}(\omega) = 0$, 上式成为

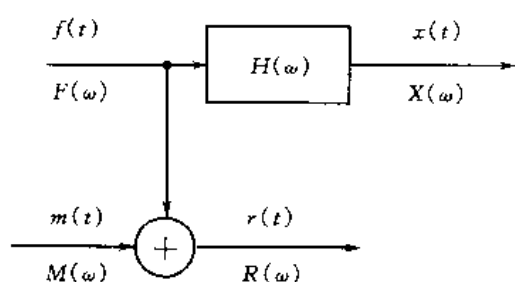
$$|H_s(\omega)|^2 = \frac{G_{xx}(\omega) + G_{mm}(\omega)}{G_{ff}(\omega)} = |H(\omega)|^2 \left(1 + \frac{G_{mm}(\omega)}{G_{xx}(\omega)} \right) \quad (3.8-4)$$

可见, 只有响应受到噪声污染时, 不断增加平均次数得到的频响函数第三估算式 $|H_s(\omega)|$ 是实际频响函数 $|H(\omega)|$ 的过估计。

综上所述, 只有响应受到噪声污染时, 频响函数的三种估算式有如下关系:

$$|H_1(\omega)| = |H(\omega)| < |H_s(\omega)| < |H_2(\omega)| \quad (3.8-5)$$

3.8.2 只有激励信号受到噪声污染(输入端噪声影响)



如图 3.8-2 所示, 如果只有激励信号 $f(t)$ 受到噪声 $m(t)$ 污染, 并设噪声 $m(t)$ 与激励 $f(t)$ 和响应 $x(t)$ 无关。噪声 $m(t)$ 的傅里叶谱为 $M(\omega)$, 实际受到噪声污染的激励信号 $r(t) = f(t) + m(t)$ 的傅里叶谱:

$$R(\omega) = F(\omega) + M(\omega) \quad (3.8-6)$$

经过类似推导, 可得只有激励信号受到噪声污染时频响函数的三种估算形式。

图 3.8-2 只有激励信号受到噪声污染

1. 第一估算式

$$H_1(\omega) = \frac{G_{fx}(\omega)}{G_{ff}(\omega) + G_{mm}(\omega)} = \frac{H(\omega)}{1 + \frac{G_{mm}(\omega)}{G_{ff}(\omega)}} \quad (3.8-7)$$

可见, 只有激励受到噪声污染时, 不断增加平均次数得到的频响函数第一估算式 $H_1(\omega)$ 是实际频响函数 $H(\omega)$ 的欠估计。

2. 第二估算式

$$H_2(\omega) = \frac{G_{xx}(\omega)}{G_{ff}(\omega)} = H(\omega) \quad (3.8-8)$$

可见, 只有激励受到噪声污染时, 不断增加平均次数得到的频响函数第二估算式 $H_2(\omega)$ 是实际频响函数 $H(\omega)$ 的真估计。

3. 第三估算式

$$|H_s(\omega)|^2 = \frac{G_{xx}(\omega)}{G_{ff}(\omega) + G_{mm}(\omega)} = \frac{|H(\omega)|^2}{1 + \frac{G_{mm}(\omega)}{G_{ff}(\omega)}} \quad (3.8-9)$$

可见, 只有激励受到噪声污染时, 不断增加平均次数得到的频响函数第三估算式 $|H_s(\omega)|$ 是实际频响函数 $|H(\omega)|$ 的欠估计。

综上所述, 只有激励受到噪声污染时, 频响函数三种估算式有如下关系:

$$|H_1(\omega)| < |H_s(\omega)| < |H(\omega)| = |H_2(\omega)| \quad (3.8-10)$$

3.8.3 激励和响应信号都受到噪声污染(输入、输出端同时受噪声影响)

更普遍的情况是,实测激励和响应信号都受到噪声污染,如图 3.8-3 所示。假设各种噪声信号与激励和响应无关,运用同样方法,可以推得频响函数的三种估算形式。

1. 第一估算式

$$H_1(\omega) = \frac{H(\omega)}{1 + \frac{G_{mm}(\omega)}{G_{ff}(\omega)}} \quad (3.8-11)$$

可见,此时第一估算式 $H_1(\omega)$ 是实际频响函数 $H(\omega)$ 的欠估计,且与响应信号中噪声无关。

2. 第二估算式

$$H_2(\omega) = H(\omega) \left(1 + \frac{G_{mm}(\omega)}{G_{rr}(\omega)} \right) \quad (3.8-12)$$

可见,此时第二估算式 $H_2(\omega)$ 是实际频响函数 $H(\omega)$ 的过估计,且与激励信号中噪声无关。

3. 第三估算式

$$|H_s(\omega)|^2 = |H(\omega)|^2 \left[\frac{1 + \frac{G_{mm}(\omega)}{G_{xx}(\omega)}}{1 + \frac{G_{mm}(\omega)}{G_{ff}(\omega)}} \right] \quad (3.8-13)$$

可见,此时第三估算式 $|H_s(\omega)|$ 是较 $|H_1(\omega)|$ 、 $|H_2(\omega)|$ 更接近实际频响函数 $|H(\omega)|$ 的估计形式。

综上所述,在激励和响应都受到噪声污染情况下,频响函数三种估算形式有如下关系:

$$|H_1(\omega)| < |H_s(\omega)| \approx |H(\omega)| < |H_2(\omega)| \quad (3.8-14)$$

根据上述结论,可以进一步讨论以下几点内容:

① 频响函数的第一估算式和第二估算式给出实际频响函数的范围

$$|H_1(\omega)| \leq |H(\omega)| \leq |H_2(\omega)| \quad (3.8-15)$$

在受噪声污染情况下,第三估算式 $|H_s(\omega)|$ 虽与实际频响函数幅值最为接近,但它只能给出频响函数幅值的估计信息,无法得到其他信息,故应用不多。

② 式(3.8-15)表明

$$0 \leq \frac{|H_1(\omega)|}{|H_2(\omega)|} \leq 1$$

由式(1.7-36)、式(1.7-37)知

$$\frac{|H_1(\omega)|}{|H_2(\omega)|} = \frac{|G_{fx}(\omega)|^2}{|G_{ff}(\omega)G_{xx}(\omega)|} = \frac{G_{fx}(\omega)G_{fx}^*(\omega)}{G_{ff}(\omega)G_{xx}(\omega)} = \frac{G_{fx}(\omega)G_{rf}(\omega)}{G_{ff}(\omega)G_{xx}(\omega)} = \frac{H_1(\omega)}{H_2(\omega)}$$

称为相干函数,记为

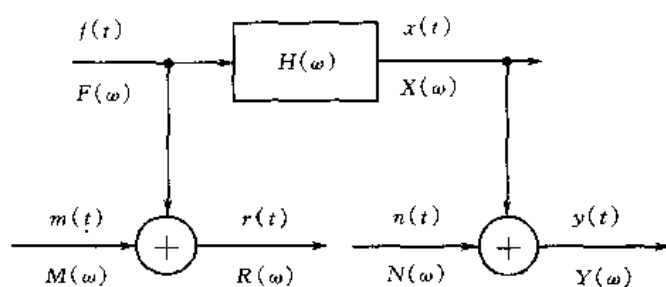


图 3.8-3 激励和响应都受到噪声污染

$$\gamma^2(\omega) = \frac{|G_{fx}(\omega)|^2}{G_{ff}(\omega)G_{xx}(\omega)} = \frac{H_1(\omega)}{H_2(\omega)} \quad (3.8-16)$$

显然

$$0 \leq \gamma^2(\omega) \leq 1 \quad (3.8-17)$$

如果测试信号不受噪声污染, $H_1(\omega) = H_2(\omega)$, $\gamma^2(\omega) = 1$; 如果测试信号完全被噪声淹没, $\frac{H_1(\omega)}{H_2(\omega)} \rightarrow 0$, $\gamma^2(\omega) = 0$ 。所以相干函数反映了测试信号受噪声污染的情况, 相干函数值越大, 说明噪声污染越小。

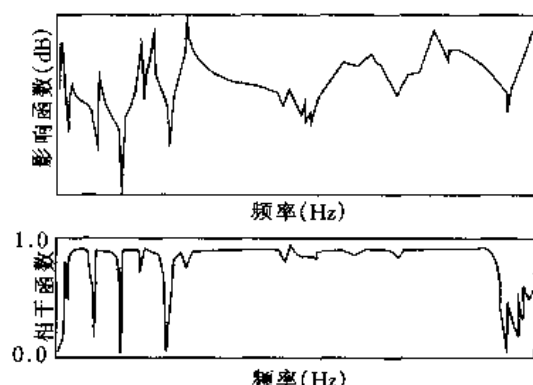


图 3.8-4 随机激励时共振区和反共振区信号相干性较差

③相干函数更重要的意义在于, 它反映了激励和响应两信号的相干关系。如果 $\gamma^2(\omega) = 1$, 说明响应信号完全由对应激励产生; 如果 $\gamma^2(\omega) = 0$, 说明实测响应信号与实测激励信号完全无关。事实上, 相干函数可以表示任意两个信号的相关程度。相干关系的好坏程度除了与噪声有关外, 还与信号本身的强弱或信噪比有关。当使用随机激励时, 即使噪声水平一定, 在共振区和反共振区信号的强度相差悬殊, 因而导致相干函数的值也相差许多。在共振区, 激励信号弱, 响应信号强, 相当于只有激励信号受到噪声污染的情形, $H_1(\omega)$ 偏小, $H_2(\omega)$ 较接近 $H(\omega)$, 导致相干函数较小; 在反共振区, 激励信号强, 响应信号弱, 相当于只有响应信号受到噪声污染的情形, $H_1(\omega)$ 接近 $H(\omega)$, 但 $H_2(\omega)$ 偏大, 也导致相干函数小。因此, 在共振区和反共振区, 即使噪声水平较低, 也会导致相干函数下降较多, 如图 3.8-4 所示。

④大部分信号分析系统只给出一种频响函数的估计形式。因此, 在测量频响函数时, 需要同时测得相干函数。一般认为, 在非共振区或非反共振区, $\gamma^2(\omega) \geq 0.8$, 表明频响函数质量可靠。前述抑制噪声的各种方法都会提高频响函数的测试质量, 提高相干函数值。

⑤本节所述是针对单点激励方式讨论的。对多点输入多点输出方式, 可类似讨论噪声的影响。同时, 尚需引入反映两点激励相干性的偏相干函数, 反映一点响应与所有输入信号之间相干性的重相干函数, 而反映某点激励与某点响应相干性的相干函数称为常相干函数。

3.8.4 频响函数的无偏估计

近年来, 人们不断探索一些频响函数的无偏估计。主要思想是, 摒弃原来只由激励和响应信号二阶功率谱求频响函数的方法, 改用其他辅助信号求新形式的功率谱, 从而得到频响函数的无偏估计。如 H_c 估计、三通道法利用了激励原信号或第三点响应信号, H_z 估计和 H_b 估计则利用了激励、响应信号的三阶谱。其中 H_z 估计方法简单, 下面予以介绍。

设激励和响应信号都受到噪声污染, 如图 3.8-3 所示。由式(1.7-24), 对单点激励情形有

$$X(\omega) = H(\omega)F(\omega)$$

即

$$Y(\omega) - N(\omega) = H(\omega)[R(\omega) - M(\omega)] \quad (3.8-18)$$

式中 $X(\omega)$ 、 $F(\omega)$ 、 $Y(\omega)$ 、 $N(\omega)$ 、 $R(\omega)$ 、 $M(\omega)$ 均理解为相应时域信号的有限傅氏谱。

仍设噪声与真实激励和响应无关, 则 $G_{ry}(\omega) = G_{fx}(\omega)$, 且与噪声无关。以 $G_{ry}^*(\omega)$ 乘以式(3.8-18), 并取数学期望, 得

$$G_{ry,y}(\omega) - G_{ry,n}(\omega) = H(\omega)[G_{ry,r}(\omega) - G_{ry,m}(\omega)]$$

而

$$G_{ry,n}(\omega) = G_{ry,m}(\omega) = 0$$

则

$$G_{ry,y}(\omega) = H(\omega)G_{ry,r}(\omega)$$

定义

$$H_z(\omega) = \frac{G_{ry,y}(\omega)}{G_{ry,r}(\omega)} \quad (3.8-19)$$

称为频响函数的 $H_z(\omega)$ 估计。当平均次数足够多时, $H_z(\omega)$ 趋于频响函数真值 $H(\omega)$ 。式中

$$\left. \begin{aligned} G_{ry,y}(\omega) &= \frac{1}{T} E[G_{ry}^*(\omega) Y(\omega)] \\ G_{ry,r}(\omega) &= \frac{1}{T} E[G_{ry}^*(\omega) R(\omega)] \end{aligned} \right\} \quad (3.8-20)$$

3.9 动态测试后处理综述

前述几节对由激励和响应的时间历程到频响函数的数字信号处理过程进行了详细讨论, 本节对这一过程做一综述。

图 3.9-1 给出数字信号分析系统的一般原理框图。图中模拟输入一般为两通道, 一为激励信号输入, 另一为响应信号输入。

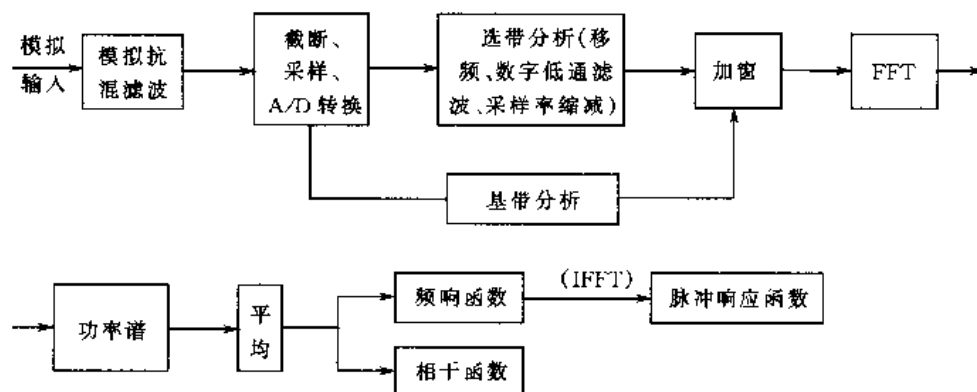


图 3.9-1 数字信号分析系统一般原理

在频响函数的实际测量中, 还有一些经验性结论需要提及。这里只对单点激励方式下频响函数测量中需要注意的事项做一介绍。

1. 做好预试验

正式测试前, 宜对试验结构的特性做一番检验, 大致包括以下几项:

①通过不同力度的激励试验, 检验被测结构的线性性质;

- ②通过激励点、响应点互易试验,检验被测结构频响函数矩阵的对称性;
- ③选择2~4个测点做重复性试验,检验各模态数据的误差是否小于5%~10%;
- ④分散误差试验,各测点模态频率的分散误差宜为0.5%~1.0%,阻尼比的分散误差宜小于5%~10%。

2. 动态测试中注意事项

(1) 选择合适量程

在动态测试及后处理中,测试、分析仪器宜处于半量程工作状态。若量程设置过大,测试、分析信号的电平明显低于设置量程,信噪比将降低;反之,若量程设置过小,在测试、分析过程中容易过载,产生信号削波,导致测量误差。

(2) 宜多测一些频响函数数据

理论上讲,识别一组完整模态参数,只需测得频响函数矩阵的一列或一行元素。不过,为了增加测试的可靠度,宜适当地多增加一些测量数据。原点频响函数宜多测1~2个,选择其中一个比较理想的频响函数。

3. 检查频响函数的测试质量

影响频响函数测试质量的因素很多,如测量信号中噪声的影响、激励点选择不当、结构非线性因素、激振力过大或过小等等。除了用相干函数判别频响函数质量外,尚可直接根据原点和跨点频响函数的特征去判别。1.7节中已对这些特征做过论述。

思 考 题

1. 掌握采样时间(样本长度 T)、采样时间间隔(Δt)、采样频率(f_s)、采样点数(N)、频率分辨率(Δf)等概念,写出这几个量的关系式。
2. 简述从无限长连续信号到有限长离散信号的处理过程。它们的时域和频域波形有何变化?
3. 写出离散傅氏变换对公式。
4. 离散傅里叶变换与傅里叶变换频谱图有何不同?依此说明采样频率对分析信号有何影响?
5. 叙述采样定理。
6. 什么叫频率混叠?理想情况下,完全满足采样定理的条件会产生频率混叠吗?
7. 图3.3-3中的信号采样后是否出现频率混叠(标“·”处为采样点)?为什么?
8. 什么是泄漏现象?举例说明。
9. 何种情况下完全没有频率泄漏?
10. 什么是加窗?
11. 常用窗函数有几种?各适用于何种信号?
12. 理解离散傅里叶变换的两种推导过程。
13. 什么叫基带分析法和选带分析法(细化FFT)?为什么要使用选带分析法?
14. 设采样点数为1024,事实上显示出的有效谱线数却只有256条,为什么?
15. 细化倍数是否越高越好?对何种信号适宜用选带技术,何种信号不适宜用或要有条件地使用?
16. 什么是平均技术?如何分类?一般的平均是指对何种信号的平均?
17. 线性平均(稳态平均)和指数平均(衰减平均、动态平均)适用于何种类型的信号?
18. 单点激励下频响函数常用哪三种估算形式?写出其表达式。理想情况下(无噪声影响),三种形式相同吗?
19. 噪声对频响函数估算式有何影响(分三种情形)?三种估算形式估算值的关系如何?真实频响函数的上、下限如何?

20. 相干函数如何定义?为什么要测量相干函数?
21. 相干函数为何值时说明频响函数质量较好?对不同激励(如冲击激励和随机激励),这一标准有何差异?
22. 什么是频响函数的无偏估计?
23. 简述动态测试后处理的过程。
24. 为什么要做预试验?一般有几项内容?
25. 如何定性地检查频响函数测试质量(从频响曲线上观察)?

第 4 章 模态参数识别的频域方法

4.1 引言

参数识别属于系统识别的一种。所谓系统识别或系统辨识,通常是指根据观测到的输入输出数据建立系统的数学模型,并要求这个数学模型按照一定准则,尽可能精确地反映系统的动态特性。有些情况下,只根据系统的输出数据也能建立相应的数学模型。所以,系统识别也就是实验建模的过程。

系统识别已远远超过了工程和物理中的应用范畴。在其他许多学科,如生物学、医学、气象学、经济学、人口学、生态学、社会学等领域中,系统识别的方法得到了越来越广泛的应用。目前,系统识别理论已成为一门独立而成熟的学科。特别是近年来现代控制理论和计算机技术的发展,大大促进了系统识别理论的应用。

如果系统的数学模型能用一定数量的参数所描述,那么系统识别便成为参数识别,又称参数辨识或参数估计。在结构振动工程中,描述结构的数学模型有物理参数模型、模态参数模型和非参数模型。所以振动结构的系统识别有物理参数识别、模态参数识别和非参数识别。非参数识别也是一类系统识别,在第 2 章和第 3 章已经介绍了非参数识别的基本过程,得到了频响函数或脉冲响应函数。事实上,振动结构的参数识别是建立在这些非参数识别基础上的,其中模态参数识别是模态分析中最为基本和重要的一类系统识别。本章介绍模态参数识别的频域方法,第 5 章介绍模态参数识别的时域方法。

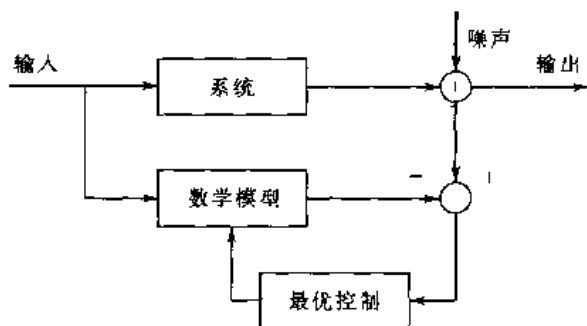


图 4.1-1 系统识别的过程

模态参数识别的方法分为直接估计法和曲线拟合法。直接估计法认为系统的观测数据是准确的,没有噪声和误差,直接由观测数据求取系统的数学模型。在模态参数识别的频域方法中,直接估计法有直接读数法(分量估计法)和差分法等。严格来说,直接估计法不是现代意义上的系统识别,因为任何观测数据都混有噪声和各种误差影响,直接估计法没有应用最优控制

原则使实验建模误差最小。现代意义的系统识别都是建立在最优控制原则上的,按照一定的最优控制准则和算法使实验数学模型和理论数学模型误差最小,从而得到反映系统特性的最优数学模型,如图 4.1-1 所示。这一含义下的模态参数识别称为曲线拟合法,亦即用理论曲线去拟合实测曲线,并使之误差最小。在模态参数识别的频域法中,有最小二乘圆拟合法、非线性加权最小二乘法、直接偏导数法、Levy 法、正交多项式拟合法、分区模态综合法、频域总体识别法等。

模态参数识别的另一种分类方法是按输入输出方式分为单入单出(SISO)识别、单入多出(SIMO)识别和多人多出(MIMO)识别。

模态参数识别的频域法又可分为单模态识别法和多模态识别法。对各模态耦合较小的系统^①,前者可达到满意的识别精度。而对模态耦合较大的系统,必须用多模态识别法。

使观测模型最优的估计准则就是系统识别的数学方法。在广义的系统识别问题中,评价模型最优的估计准则很多,如最小二乘估计法、贝叶斯估计法、广义最小二乘估计法、极大似然估计法、卡尔曼滤波法、辅助变量法和随机逼近法等。其中最小二乘估计法最基本、最重要。因为它数学概念简单,容易理解,不需要太多的数理统计知识。在多数情况下,用最小二乘法作为估计准则,能达到理想效果,甚至在其他方法失效时,最小二乘法仍能提供解答。下面首先介绍最小二乘法的基本原理。

4.2 最小二乘法

最小二乘法一般指最小二乘估计(LSE)和加权最小二乘估计(WLSE)两种方法。应用最小二乘法直接估计的都是线性参数,对非线性参数的估计,需要辅以迭代法。

4.2.1 最小二乘估计

设线性时不变系统的数学模型可用含 n 个参数 $\theta_i (i=1,2,\dots,n)$ 的线性参数模型表示

$$y = \sum_{i=1}^n \theta_i x_i = \mathbf{x}^T \boldsymbol{\theta} \quad (4.2-1)$$

式中 $\boldsymbol{\theta} = [\theta_1 \ \theta_2 \ \dots \ \theta_n]^T$, $\mathbf{x} = [x_1 \ x_2 \ \dots \ x_n]^T$ 。 $\boldsymbol{\theta}$ 、 \mathbf{x} 为实矢量, y 为实数。

参数 $\boldsymbol{\theta}$ 与变量 y 是线性关系,故称为线性参数。模型(4.2-1)是根据一定理论和方法建立起来的反映系统动态特性的一种理论模型,在系统识别问题中, $\boldsymbol{\theta}$ 是待识别参数。

现在,在 s 个观测点 $k=1,2,\dots,s$ 得到系统的一组 s 个观测数据 $\tilde{x}(k)$ 、 $\tilde{y}(k)$ ^② ($k=1,2,\dots,s$)。对应相同观测点上的理论值 $\mathbf{x}(k)$ 、 $y(k)$ 完全满足方程(4.2-1),即

$$y(k) = \mathbf{x}^T(k) \boldsymbol{\theta} \quad (k=1,2,\dots,s) \quad (4.2-2)$$

由于噪声影响等误差,实测值 $\tilde{x}(k)$ 、 $\tilde{y}(k)$ 只是近似满足式(4.2-1),即

$$\tilde{y}(k) = \tilde{\mathbf{x}}^T(k) \boldsymbol{\theta} + \varepsilon(k) \quad (k=1,2,\dots,s) \quad (4.2-3)$$

$\varepsilon(k)$ 是理论值 $y(k)$ 与观测值 $\tilde{y}(k)$ 之间的误差。

将理论模型(4.2-2)写成矩阵形式为

$$\mathbf{y} = \mathbf{X} \boldsymbol{\theta} \quad (4.2-4)$$

式中

$$\mathbf{y} = [y(1) \ y(2) \ \dots \ y(s)]^T$$

^① 可用模态分离系数(相邻模态频率差与半功率带宽之比)表示模态耦合程度。一般认为模态分离系数 ≥ 2 时,耦合较小。

^② 本章及后面常用上标“ \sim ”表示观测值。

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} x_1(1) & x_2(1) & \cdots & x_n(1) \\ x_1(2) & x_2(2) & \cdots & x_n(2) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1(s) & x_2(s) & \cdots & x_n(s) \end{bmatrix}_{s \times n} \quad (4.2-5)$$

将实测模型(4.2-3)也写成矩阵形式

$$\bar{\mathbf{y}} = \hat{\mathbf{X}}\boldsymbol{\theta} + \boldsymbol{\varepsilon} \quad (4.2-6)$$

式中

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{y}} &= [\bar{y}(1) \quad \bar{y}(2) \quad \cdots \quad \bar{y}(s)]^T \\ \hat{\mathbf{X}} &= \begin{bmatrix} \hat{x}_1(1) & \hat{x}_2(1) & \cdots & \hat{x}_n(1) \\ \hat{x}_1(2) & \hat{x}_2(2) & \cdots & \hat{x}_n(2) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \hat{x}_1(s) & \hat{x}_2(s) & \cdots & \hat{x}_n(s) \end{bmatrix}_{s \times n} \\ \boldsymbol{\varepsilon} &= [\varepsilon(1) \quad \varepsilon(2) \quad \cdots \quad \varepsilon(s)]^T \end{aligned} \quad (4.2-7)$$

在回归分析中,式(4.2-6)称为线性回归模型, $\boldsymbol{\theta}$ 称为回归系数,误差矢量 $\boldsymbol{\varepsilon}$ 称为残差。由式(4.2-6),误差矢量

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \bar{\mathbf{y}} - \hat{\mathbf{X}}\boldsymbol{\theta} \quad (4.2-8)$$

它是实测模型(4.2-6)与理论模型(4.2-4)之间的总体误差。系统识别的目的是求得一组 $\boldsymbol{\theta}$,使 $\boldsymbol{\varepsilon}$ 范数最小。为此,定义目标函数(或评价函数)

$$E = \boldsymbol{\varepsilon}^T \boldsymbol{\varepsilon} = \sum_{k=1}^s \varepsilon^2(k) \quad (4.2-9)$$

E 是标量,为模型的总方差。将式(4.2-8)代入上式得

$$\begin{aligned} E &= (\bar{\mathbf{y}} - \hat{\mathbf{X}}\boldsymbol{\theta})^T (\bar{\mathbf{y}} - \hat{\mathbf{X}}\boldsymbol{\theta}) \\ &= \bar{\mathbf{y}}^T \bar{\mathbf{y}} - \bar{\mathbf{y}}^T \hat{\mathbf{X}}\boldsymbol{\theta} - \boldsymbol{\theta}^T \hat{\mathbf{X}}^T \bar{\mathbf{y}} + \boldsymbol{\theta}^T \hat{\mathbf{X}}^T \hat{\mathbf{X}} \boldsymbol{\theta} \end{aligned} \quad (4.2-10)$$

E 是 $\boldsymbol{\theta}$ 的二次函数。最小二乘估计的思想是,求得 $\boldsymbol{\theta}$ 的一组估算值 $\hat{\boldsymbol{\theta}}$,使 E 最小。为此, E 对 $\boldsymbol{\theta}$ 求一次偏导数

$$\frac{\partial E}{\partial \boldsymbol{\theta}} = -2\hat{\mathbf{X}}^T \bar{\mathbf{y}} + 2\hat{\mathbf{X}}^T \hat{\mathbf{X}} \boldsymbol{\theta} \quad (4.2-11)$$

令

$$\frac{\partial E}{\partial \boldsymbol{\theta}} = 0 \quad (4.2-12)$$

由式(4.2-11)得

$$\hat{\mathbf{X}}^T \hat{\mathbf{X}} \hat{\boldsymbol{\theta}} = \hat{\mathbf{X}}^T \bar{\mathbf{y}} \quad (4.2-13)$$

因为观测矩阵 $\hat{\mathbf{X}}$ 一般是列满秩矩阵($s > n$),则 $(\hat{\mathbf{X}}^T \hat{\mathbf{X}})^{-1}$ 存在,所以可解出

$$\hat{\boldsymbol{\theta}} = (\hat{\mathbf{X}}^T \hat{\mathbf{X}})^{-1} \hat{\mathbf{X}}^T \bar{\mathbf{y}} \quad (4.2-14)$$

易证 $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ 使 E 具有极小值。事实上,式(4.2-11)对 $\boldsymbol{\theta}$ 求偏导数得

$$\frac{\partial^2 E}{\partial \boldsymbol{\theta}^2} = 2\hat{\mathbf{X}}^T \hat{\mathbf{X}}$$

因为 $\frac{\partial^2 E}{\partial \boldsymbol{\theta}^2}$ 正定,所以 $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ 使 E 具有极小值。

如果 ε 是一个具有零均值的平稳随机过程, 且与 \tilde{X} 、 \tilde{y} 无关, 例如 ε 为白噪声, 可以证明, 最小二乘估计 $\hat{\theta}$ 是无偏的、有效的(最小估计)和一致的。

4.2.2 加权最小二乘估计

考虑各个观测数据的误差分布不同, 定义加权目标函数

$$E_w = \varepsilon^T W \varepsilon \quad (4.2-15)$$

加权矩阵 W 为 $s \times s$ 阶对称正定矩阵。

将式(4.2-8)代入式(4.2-15), 并令

$$\frac{\partial E_w}{\partial \theta} = 0 \quad (4.2-16)$$

可解得加权最小二乘估计

$$\hat{\theta}_w = (\tilde{X}^T W \tilde{X})^{-1} \tilde{X}^T W \tilde{y} \quad (4.2-17)$$

加权矩阵 W 的取法值得讨论。可以证明, 如果 ε 是具有零均值的平稳随机过程, 且与 \tilde{X} 、 \tilde{y} 无关, 则 $\hat{\theta}_w$ 是无偏估计, 但不是有效估计和一致估计。 W 取特定值时, $\hat{\theta}_w$ 才能成为有效估计。

设 θ 是 $\hat{\theta}_w$ 估计的真值, 估计误差 $\hat{\theta}_w - \theta$ 的协方差矩阵

$$\psi_w = E[(\hat{\theta}_w - \theta)(\hat{\theta}_w - \theta)^T] \quad (4.2-18)$$

将式(4.2-6)代入式(4.2-17), 得

$$\hat{\theta}_w = \theta + (\tilde{X}^T W \tilde{X})^{-1} \tilde{X}^T W \varepsilon \quad (4.2-19)$$

式(4.2-19)代入式(4.2-18), 整理得

$$\psi_w = (\tilde{X}^T W \tilde{X})^{-1} \tilde{X}^T W C W \tilde{X} (\tilde{X}^T W \tilde{X})^{-1} \quad (4.2-20)$$

式中

$$C = E[\varepsilon \varepsilon^T] \quad (4.2-21)$$

为残差 ε 的协方差矩阵。

可以证明, 若取加权矩阵

$$W = C^{-1} \quad (4.2-22)$$

则使 ψ_w 范数最小, 记为 ψ_{MV} 。式(4.2-22)代入式(4.2-20), 得

$$\psi_{MV} = (\tilde{X}^T C^{-1} \tilde{X})^{-1} \quad (4.2-23)$$

此时系统参数加权最小二乘估计 $\hat{\theta}_w$ 为有效估计, 称为马尔可夫(Markov)估计, 记为 $\hat{\theta}_{MV}$ 。式(4.2-22)代入式(4.2-17), 得马尔可夫估计

$$\hat{\theta}_{MV} = (\tilde{X}^T C^{-1} \tilde{X})^{-1} \tilde{X}^T C^{-1} \tilde{y} \quad (4.2-24)$$

因为马尔可夫估计是无偏有效估计, 所以一般加权最小二乘法均指马尔可夫估计。

顺便指出, 如果残差 ε 为独立、同分布的、均值为零的随机矢量, 设方差为 σ^2 , 即

$$C = E[\varepsilon \varepsilon^T] = \sigma^2 I \quad (4.2-25)$$

(式中 I 为单位矩阵), 则易知最小二乘法估计误差协方差 ψ 与马尔可夫估计误差协方差 ψ_{MV} 相等, 即 $\psi = \psi_{MV}$ 。因此, 选用权矩阵

$$W = \sigma^{-2} I \quad (4.2-26)$$

时, 马尔可夫估计 $\hat{\theta}_{MV}$ 与最小二乘法估计 $\hat{\theta}$ 相等, 即 $\hat{\theta}_{MV} = \hat{\theta}$ 。

4.2.3 最小二乘估计的数学特性与统计特性

最小二乘法不仅在模态参数频域识别法中有广泛应用,而且在时域识别法中也有广泛应用。因此,有必要对最小二乘法做进一步讨论。

1. 最小二乘估计与广义逆矩阵的关系

在最小二乘估计式(4.2-14)中,如果 $\tilde{\mathbf{X}}$ 为方阵并可逆,则

$$\hat{\boldsymbol{\theta}} = \tilde{\mathbf{X}}^{-1} \tilde{\mathbf{y}} \quad (4.2-27)$$

在实测模型式(4.2-6)中,令 $\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{0}$,或在理论模型式(4.2-4)中令 $\mathbf{y} = \tilde{\mathbf{y}}$, $\mathbf{X} = \tilde{\mathbf{X}}$,得

$$\tilde{\mathbf{y}} = \tilde{\mathbf{X}} \boldsymbol{\theta} \quad (4.2-28)$$

当 $\tilde{\mathbf{X}}$ 为方阵并可逆,上式的解即式(4.2-27)。

这说明,当 $\tilde{\mathbf{X}}$ 为方阵并可逆时,最小二乘法失效,解式(4.2-27)不能使误差最小。欲使估计误差最小,须使用更多测点的信息,即增大测点数使 $s > n$,有最小二乘解式(4.2-14)。

由矩阵论知,当 $s > n$ 时,设 $\tilde{\mathbf{X}}$ 的秩为 n , $\tilde{\mathbf{X}}$ 的广义逆矩阵或 Moore-Penrose 意义下的广义逆矩阵为

$$\tilde{\mathbf{X}}^+ = (\tilde{\mathbf{X}}^T \tilde{\mathbf{X}})^{-1} \tilde{\mathbf{X}}^T \quad (4.2-29)$$

因此,最小二乘解式(4.2-14)可写成

$$\hat{\boldsymbol{\theta}} = \tilde{\mathbf{X}}^+ \tilde{\mathbf{y}} \quad (4.2-30)$$

可见,当 $\tilde{\mathbf{X}}$ 为列满秩矩阵时,式(4.2-28)的最小二乘解是通过 $\tilde{\mathbf{X}}$ 的广义逆求出的。

在有些问题的讨论中,还会遇到 $\tilde{\mathbf{X}}$ 为行满秩矩阵($s < n$)的情形。设 $\tilde{\mathbf{X}}$ 的秩为 s ,则式(4.2-30)中的 $\tilde{\mathbf{X}}^+$ 为

$$\tilde{\mathbf{X}}^+ = \tilde{\mathbf{X}}^T (\tilde{\mathbf{X}} \tilde{\mathbf{X}}^T)^{-1} \quad (4.2-31)$$

2. 最小二乘估计与相关函数矩阵或协方差矩阵的关系

最小二乘估计式(4.2-14)可从另外角度推出。设 $\tilde{\mathbf{X}}$ 为列满秩矩阵($s > n$),式(4.2-28)左乘 $\tilde{\mathbf{X}}^T$,得

$$\tilde{\mathbf{X}}^T \tilde{\mathbf{y}} = \tilde{\mathbf{X}}^T \tilde{\mathbf{X}} \boldsymbol{\theta} \quad (4.2-32)$$

解得 $\boldsymbol{\theta}$ 即式(4.2-14)。现今

$$\tilde{\mathbf{R}} = \tilde{\mathbf{X}}^T \tilde{\mathbf{X}} \quad (4.2-33)$$

$$\tilde{\mathbf{r}} = \tilde{\mathbf{X}}^T \tilde{\mathbf{y}} \quad (4.2-34)$$

$\tilde{\mathbf{R}}$ 为 $\tilde{\mathbf{X}}$ 的相关函数矩阵, $\tilde{\mathbf{r}}$ 为 $\tilde{\mathbf{X}}$ 与 $\tilde{\mathbf{y}}$ 之间的相关函数列阵,则式(4.2-32)成为

$$\tilde{\mathbf{R}} \boldsymbol{\theta} = \tilde{\mathbf{r}} \quad (4.2-35)$$

其解

$$\boldsymbol{\theta} = \tilde{\mathbf{R}}^{-1} \tilde{\mathbf{r}} \quad (4.2-36)$$

与式(4.2-14)等效。由此说明,若直接测得输入信号的相关函数矩阵 $\tilde{\mathbf{R}}$ 和输入、输出信号的相关函数列阵 $\tilde{\mathbf{r}}$,构造式(4.2-35),解得 $\boldsymbol{\theta}$ 的值与最小二乘解等价,即使用相关函数代替原信号所得估计 $\hat{\boldsymbol{\theta}}$,即为最小二乘解。

在时域识别的有些方法中, \mathbf{x} 、 \mathbf{y} 为零均值的平稳随机信号,则 $\tilde{\mathbf{R}}$ 和 $\tilde{\mathbf{r}}$ 退化为协方差矩阵 $\tilde{\mathbf{C}}$ 和协方差列阵 $\tilde{\mathbf{c}}$ 。

顺便指出, $\tilde{\mathbf{R}}$ 或 $\tilde{\mathbf{C}}$ 已经为满秩方阵,若对式(4.2-35)再使用一次最小二乘法则无效,不能提高估计精度。

以上讨论均对实数模型而言。若为复数模型,有关转置符号“T”应换为转置共轭符号“H”。

4.3 单模态识别之一:最小二乘圆拟合法

早期的模态参数识别以单模态识别法为主。常见的单模态识别有三种方法,即直接读数法、最小二乘圆拟合法和差分法。其中直接读数法和差分法属于直接估计,最小二乘圆拟合法属于曲线拟合法。

研究单模态识别方法的意义有:①对模态耦合较小的系统(小阻尼且模态不密集),用单模态识别法识别出的结果能达到满意的精度;②对模态耦合较大的系统,需采用多模态识别法,多模态识别法一般需要迭代法完成全部模态参数的识别,用单模态识别法识别出的结果可作为迭代过程的初值,这样可大大加快迭代过程的收敛速度。

所谓单模态识别法,是指一次只识别一阶模态的模态参数,所用数据为该阶模态共振频率附近的频响函数值。对其余模态的影响可以全部忽略或简化处理,待识别的该阶模态称为主导模态。理论上说,只用一个频响函数(原点或跨点频响函数),就可得到主导模态的模态频率和模态阻尼(衰减系数),而要得到该阶模态振型值,需要频响函数矩阵的一系列元素(激励一点,测各点响应)或一行元素(激励各点,测一点响应)。这样便得到主导模态的全部模态参数。将所有关心模态分别作为主导模态进行单模态识别,就得到系统各阶模态的模态参数。

既然单模态识别法一次识别一阶模态的模态参数,所以完全可利用第1章1.3节讲述的单自由度系统频响函数各种曲线的特征进行参数识别,这就是直接读数法。频响函数各种特征曲线实际就是频响函数各种分量曲线,所以这种识别方法又称为分量分析法。这种方法主要基于特征曲线的图形进行参数识别,所以有人也称为图解法。由于该方法识别精度差、效率低,现已基本淘汰,故本书不予介绍。

最小二乘圆拟合法的基本思想是,根据实测频响函数数据,用理想导纳圆去拟合实测的导纳圆,并按最小二乘原理使其误差最小。某些情况下,频响函数的 Nyquist 图在理论上是一个圆,如结构阻尼系统位移频响函数、粘性阻尼系统的速度频响函数。在小阻尼情况下,其他频响函数的 Nyquist 图也近似是一个圆。

4.3.1 实模态系统

考虑结构比例阻尼系统。由结构比例阻尼系统频响函数的模态展式(1.4-83)写出频响函数矩阵的一个元素

$$H_{ef}(\omega) = \sum_{i=1}^n \frac{\varphi_e \varphi_f}{k_i - \omega^2 m_i + j\eta_i k_i} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{K_{efi}} \cdot \frac{1}{1 - \Omega_i^2 + j\eta_i} \quad (4.3-1)$$

即 f 坐标激励、 e 坐标响应的频响函数。式中 $\Omega_i = \frac{\omega}{\omega_{0i}}$ 为频率比, $\omega_{0i} = \sqrt{\frac{k_i}{m_i}}$ 为第 i 阶模态的无阻尼固有频率。第 i 阶模态 e 、 f 坐标之间的等效刚度

$$K_{efi} = \frac{k_i}{\varphi_e \varphi_f} \quad (4.3-2)$$

显然,对应某阶模态 i 的等效刚度 K_{efi} 不是常值,因与激励坐标 f 、响应坐标 e 有关,而模态刚

度 k_i 对固定模态是常值。

1. 不考虑剩余模态的影响

(1) 理论模型

设第 i 阶模态为待识别的主导模态, 其他模态对主导模态的影响称为剩余模态。完全忽略剩余模态的影响, 由式(4.3-1)知, 该阶模态固有频率附近的频响函数为

$$H_{ef}(\omega) = \frac{1}{K_{efi}} \cdot \frac{1}{1 - \Omega_i^2 + j\eta_i} \quad (4.3-3)$$

其 Nyquist 图是一个圆。

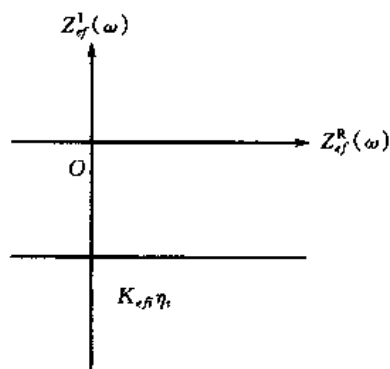


图 4.3-1 阻抗线

频响函数式(4.3-3)亦可用阻抗表示为

$$Z_{ef}(\omega) = K_{efi}(1 - \Omega_i^2 + j\eta_i) \quad (4.3-4)$$

其实、虚部分别为

$$Z_{ef}^R(\omega) = K_{efi}(1 - \Omega_i^2) \quad (4.3-5)$$

$$Z_{ef}^I(\omega) = K_{efi}\eta_i \quad (4.3-6)$$

由于 $Z_{ef}^I(\omega)$ 与 ω 无关, 所以阻抗方程(4.3-4)在 $Z_{ef}^R(\omega)$ 、 $Z_{ef}^I(\omega)$ 坐标平面上表示一根平行于水平轴的直线, 称为阻抗线, 如图 4.3-1 所示。图中假设 $K_{efi} < 0$ 。可见阻抗线与导纳圆等价, 但更为简单。

(2) 模态参数识别

对原点频响函数 $H_{ff}(\omega)$, 令振型归一化方式为 φ_i = 1, 由式(4.3-2)知 $K_{ffi} = k_i$ 。则式(4.3-5)、式(4.3-6)为

$$Z_{ff}^R(\omega) = k_i(1 - \Omega_i^2) = k_i - m_i\omega^2 \quad (4.3-7)$$

$$Z_{ff}^I(\omega) = k_i\eta_i = g_i \quad (4.3-8)$$

设实际测得主导模态固有频率附近 s 个频率点 ω_k ($k = 1, 2, \dots, s$) 处的阻抗函数值 $\tilde{Z}_{ff}^R(\omega_k)$ 、 $\tilde{Z}_{ff}^I(\omega_k)$ 。首先用 $\tilde{Z}_{ff}^I(\omega_k)$ 估算模态阻尼 g_i 。由式(4.3-8)易知 g_i 的最小二乘估计值为

$$g_i = \frac{1}{s} \sum_{k=1}^s \tilde{Z}_{ff}^I(\omega_k) \quad (4.3-9)$$

然后, 由 $\tilde{Z}_{ff}^R(\omega_k)$ 估算模态刚度 k_i 和模态质量 m_i 。 s 个频率点 ω_k 处 $\tilde{Z}_{ff}^R(\omega_k)$ 的理论值为

$$Z_{ff}^R(\omega_k) = k_i - m_i\omega_k^2 \quad (k = 1, 2, \dots, s)$$

实测 $\tilde{Z}_{ff}^R(\omega_k)$ 与理论值的总方差即目标函数为

$$E = \sum_{k=1}^s (k_i - m_i\omega_k^2 - \tilde{Z}_{ff}^R(\omega_k))^2 \quad (4.3-10)$$

令

$$\frac{\partial E}{\partial k_i} = 0, \quad \frac{\partial E}{\partial m_i} = 0$$

解得 k_i 、 m_i 的最小二乘估计值为

$$\begin{bmatrix} k_i \\ m_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s & -\sum_{k=1}^s \omega_k^2 \\ -\sum_{k=1}^s \omega_k^2 & \sum_{k=1}^s \omega_k^4 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} -\sum_{k=1}^s \tilde{Z}_{ff}^R(\omega_k) \\ \sum_{k=1}^s \tilde{Z}_{ff}^R(\omega_k) \omega_k^2 \end{bmatrix} \quad (4.3-11)$$

第 i 阶模态固有频率

$$\omega_{0i} = \sqrt{\frac{k_i}{m_i}} \quad (4.3-12)$$

由式(4.3-8),第 i 阶模态阻尼比

$$\eta_i = \frac{g_i}{k_i} \quad (4.3-13)$$

欲求振型矢量,需 n 个测点的阻抗函数。由式(4.3-3)易知

$$H_{ef}^1(\Omega_i = 1) = -\frac{1}{K_{efi}\eta_i} = -\frac{1}{Z_{ef}^1} \quad (4.3-14)$$

而 Z_{ef}^1 可由最小二乘法利用 s 个测试值 $\tilde{Z}_{ef}^1(\omega_k) (k=1, 2, \dots, s)$ 求得

$$Z_{ef}^1 = \frac{1}{s} \sum_{k=1}^s \tilde{Z}_{ef}^1(\omega_k) \quad (4.3-15)$$

所以,由 $\frac{1}{Z_{ef}^1} (e=1, 2, \dots, n)$ 组成的矢量 $\left[\frac{1}{Z_{1f}^1} \quad \frac{1}{Z_{2f}^1} \quad \dots \quad \frac{1}{Z_{nf}^1} \right]^T$ 即为振型矢量。

上述参数识别的理论模型用到与导纳圆等价的阻抗线,故又称最小二乘阻抗线法。它与最小二乘圆法等价,且更为简单。

2. 考虑剩余模态的影响

(1) 理论模型

上面分析中,在识别主导模态的模态参数时,完全忽略剩余模态的影响。事实上,即使模态耦合不大时,其他模态对主导模态也有影响。实模态系统中,对剩余模态最简单的处理是视其频响函数为常数。对式(4.3-1),考虑剩余模态的频响函数可以写成

$$H_{ef}(\omega) = \frac{1}{K_{efi}} \cdot \frac{1}{1 - \Omega_i^2 + j\eta_i} + H_{efc}^R + jH_{efc}^I \quad (4.3-16)$$

其中 $H_{efc}^R + jH_{efc}^I$ 为剩余模态的频响函数,又称剩余柔度或剩余导纳。其导纳圆方程为

$$(H_{ef}^R(\omega) - H_{efc}^R)^2 + \left(H_{ef}^I(\omega) + \frac{1}{2K_{efi}\eta_i} - H_{efc}^I \right)^2 = \left(\frac{1}{2K_{efi}\eta_i} \right)^2 \quad (4.3-17)$$

设

$$\left. \begin{aligned} x &= H_{ef}^R(\omega), y = H_{ef}^I(\omega), \rho = \frac{1}{2K_{efi}\eta_i} \\ x_0 &= H_{efc}^R, y_0 = \rho - H_{efc}^I \end{aligned} \right\} \quad (4.3-18)$$

则式(4.3-17)写成

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = \rho^2 \quad (4.3-19)$$

或

$$x^2 + y^2 + ax + by + c = 0 \quad (4.3-20)$$

式中

$$a = -2x_0, b = -2y_0, c = x_0^2 + y_0^2 - \rho^2 \quad (4.3-21)$$

式(4.3-20)即为最小二乘圆拟合法的数学模型,待识别参数为 a 、 b 、 c 。注意 a 、 b 、 c 与 $H_{ef}(\omega)$ 对应,不同的 $H_{ef}(\omega)$, a 、 b 、 c 不同。

(2) 模态参数识别

设实际测得主导模态某频响函数在 s 个频率点 ω_k ($k = 1, 2, \dots, s$) 处的频响函数值 $\tilde{H}_{ef}^R(\omega_k) = \tilde{x}_k$, $\tilde{H}_{ef}^I(\omega_k) = \tilde{y}_k$, 对应相同频率点 ω_k 处的理论值为 $H_{ef}^R(\omega_k) = x_k$, $H_{ef}^I(\omega_k) = y_k$ 。构造最小二乘法的目标函数

$$E = \sum_{k=1}^s (\tilde{x}_k^2 + \tilde{y}_k^2 + a\tilde{x}_k + b\tilde{y}_k + c)^2 \quad (4.3-22)$$

令

$$\frac{\partial E}{\partial a} = 0, \frac{\partial E}{\partial b} = 0, \frac{\partial E}{\partial c} = 0$$

解得 a 、 b 、 c 的最小二乘估计值

$$\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum \tilde{x}_k^2 & \sum \tilde{x}_k \tilde{y}_k & \sum \tilde{x}_k \\ \sum \tilde{x}_k \tilde{y}_k & \sum \tilde{y}_k^2 & \sum \tilde{y}_k \\ \sum \tilde{x}_k & \sum \tilde{y}_k & s \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} -\sum \tilde{x}_k (\tilde{x}_k^2 + \tilde{y}_k^2) \\ -\sum \tilde{y}_k (\tilde{x}_k^2 + \tilde{y}_k^2) \\ -\sum (\tilde{x}_k^2 + \tilde{y}_k^2) \end{bmatrix} \quad (4.3-23)$$

式中 Σ 即 $\sum_{k=1}^s$ 。

由式(4.3-21),得拟合圆圆心 $O_0(x_0, y_0)$ 和半径 $|\rho|$ 分别为

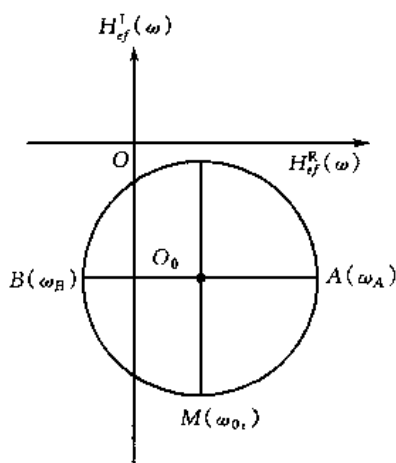


图 4.3-2 由拟合圆识别模态参数

$$\begin{aligned} x_0 &= -\frac{a}{2}, y_0 = -\frac{b}{2} \\ |\rho| &= \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{b}{2}\right)^2 - c} \end{aligned} \quad (4.3-24)$$

用 1.3 节内容可进一步识别各种模态参量,如图 4.3-2 所示,图设 $a < 0, b > 0$ 。

最小二乘阻抗线法完全用最小二乘原理估计模态参数,估计精度高,但未考虑剩余模态,故结果误差较大;最小二乘圆拟合法只用最小二乘原理估算出主导圆半径或振型,而其他模态参数的估计仍建立在图解法基础上,故精度不高。由于最小二乘阻抗线法便于编程处理,故对小阻尼系统或作为多模态识别法迭代的初值估计,这种方法很具有优越性。

注意,不管上述何种方法,都是以固有频率附近 s 个频率点 ω_k ($k = 1, 2, \dots, s$) 的频响函数实测值为基础,因此应首先由某种谱预估共振点,一般是由功率谱预估。

4.3.2 复模态系统

考虑结构阻尼系统。由式(1.5-80),写出激励 f 点、响应 e 点之间的频响函数

$$H_{ef}(\omega) = \sum_{i=1}^n \frac{m_{mi}}{m_{Di}} \cdot \frac{\phi_{ei} \phi_{fi}}{k_{mi} - \omega^2 m_{mi} + j g_{mi}} = \sum_{i=1}^n \frac{\phi_{ei} \phi_{fi}}{m_{Di} \omega_{mi}^2} \cdot \frac{1}{1 - \Omega_{mi}^2 + j \eta_{mi}} \quad (4.3-25)$$

式中 $\omega_{mi}^2 = \frac{k_{mi}}{m_{mi}}$, $\eta_{mi} = \frac{g_{mi}}{k_{mi}}$, $\Omega_{mi} = \frac{\omega}{\omega_{mi}}$, m_{1x} 、 ψ_a 、 ψ_{fi} 为复数, 其余参量均为实数。令

$$\frac{\psi_a \psi_{fi}}{m_{1x} \omega_{mi}^2} = U_{efi} + j V_{efi} = R_{efi} e^{j\varphi_{efi}} \quad (4.3-26)$$

其中

$$R_{efi} = \sqrt{U_{efi}^2 + V_{efi}^2} \quad (4.3-27)$$

$$\varphi_{efi} = \arctan \frac{V_{efi}}{U_{efi}} \quad (4.3-28)$$

U_{efi} 、 V_{efi} 、 R_{efi} 、 φ_{efi} 均为实数, 且 $R_{efi} > 0$ 。式(4.3-25)可写为

$$H_{ef}(\omega) = \sum_{i=1}^n \frac{U_{efi} + j V_{efi}}{1 - \Omega_{mi}^2 + j \eta_{mi}} = \sum_{i=1}^n R_{efi} e^{j\varphi_{efi}} \frac{1}{1 - \Omega_{mi}^2 + j \eta_{mi}} \quad (4.3-29)$$

式中待识别模态参数为 ω_{mi} (含于 Ω_{mi} 中)、 η_{mi} 、 U_{efi} 、 V_{efi} 或 ω_{mi} 、 η_{mi} 、 R_{efi} 、 φ_{efi} ($i = 1, 2, \dots, n$)。

1. 不考虑剩余模态的影响

(1) 理论模型

设主导模态为第 i 阶模态, 由式(4.3-29), 在共振点附近有

$$H_{ef}(\omega) = R_{efi} e^{j\varphi_{efi}} \frac{1}{1 - \Omega_{mi}^2 + j \eta_{mi}} \quad (4.3-30)$$

为分析上式对应的 Nyquist 图, 将其分为两部分。

令第一部分

$$\frac{1}{1 - \Omega_{mi}^2 + j \eta_{mi}} = X + j Y \quad (4.3-31)$$

显然此部分 Nyquist 图是一个圆, 方程为

$$X^2 + \left(Y + \frac{1}{2\eta_{mi}} \right)^2 = \left(\frac{1}{2\eta_{mi}} \right)^2 \quad (4.3-32)$$

圆心为 $O' \left(0, -\frac{1}{2\eta_{mi}} \right)$, 半径为 $\frac{1}{2\eta_{mi}}$, 如图 4.3-3(a) 所示。

第二部分 $R_{efi} e^{j\varphi_{efi}}$ 包含两个因子。第一个因子 R_{efi} 使上述圆半径放大为原来的 R_{efi} 倍, 即为 $\frac{R_{efi}}{2\eta_{mi}}$; 第二个因子 $e^{j\varphi_{efi}}$ 使上述圆沿逆时针绕原点旋转一个角度 φ_{efi} , 如图 4.3-3(b) 所示。最后所得式(4.3-30)的 Nyquist 图为过原点的圆。

设 $H_{ef}(\omega)$ 的实、虚部为 $H_{ef}^R(\omega) = x$, $H_{ef}^I(\omega) = y$, 则圆方程为

$$x^2 + y^2 + ax + by = 0 \quad (4.3-33)$$

圆心 $O_0 \left(-\frac{a}{2}, -\frac{b}{2} \right)$, 半径

$$\rho_{efi} = \frac{R_{efi}}{2\eta_{mi}} = \frac{1}{2} \sqrt{a^2 + b^2} \quad (4.3-34)$$

偏转角

$$\varphi_{efi} = \arctan \frac{b}{a} \quad (4.3-35)$$

式(4.3-33)即为最小二乘圆拟合法的理論模型, 待识别参数为 a 、 b 。

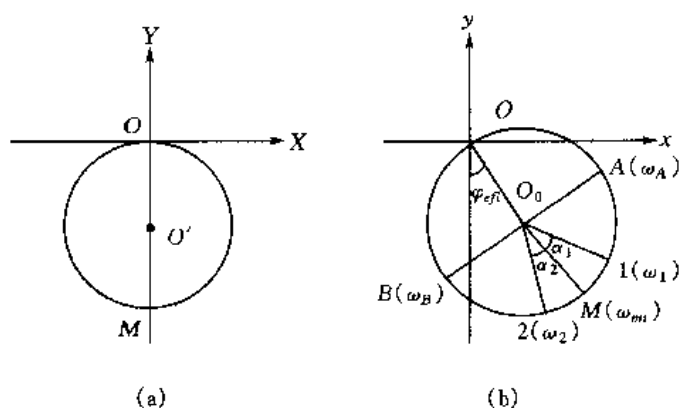


图 4.3-3 不考虑剩余模态时结构阻尼系统的导纳圆

(a) $\frac{1}{1 - \Omega_{mi}^2 + j\eta_{mi}}$ 的导纳圆; (b) 式(4.3-30)的导纳圆

(2) 参数识别

设实际测得主导模态共振点附近 s 个频响函数值 $\tilde{H}_{ef}^R(\omega_k) = \tilde{x}_k, \tilde{H}_{ef}^I(\omega_k) = \tilde{y}_k (k = 1, 2, \dots, s)$, 对应频率点上的理论值为 $H_{ef}^R(\omega_k) = x_k, H_{ef}^I(\omega_k) = y_k$ 。应用最小二乘法, 构造实测模型与理论模型之间的总方差即目标函数

$$E = \sum_{k=1}^s (\tilde{x}_k^2 + \tilde{y}_k^2 + a\tilde{x}_k + b\tilde{y}_k) \quad (4.3-36)$$

令

$$\frac{\partial E}{\partial a} = 0, \frac{\partial E}{\partial b} = 0$$

解得 a, b 的最小二乘估计值

$$\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum \tilde{x}_k^2 & \sum \tilde{x}_k \tilde{y}_k \\ \sum \tilde{x}_k \tilde{y}_k & \sum \tilde{y}_k^2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} -\sum \tilde{x}_k (\tilde{x}_k^2 + \tilde{y}_k^2) \\ -\sum \tilde{y}_k (\tilde{x}_k^2 + \tilde{y}_k^2) \end{bmatrix} \quad (4.3-37)$$

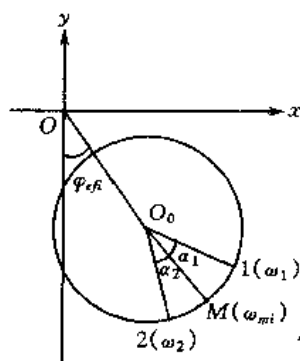
式中 Σ 即 $\sum_{k=1}^s$ 。由 1.3 节内容可求出对应的模态参数。

2. 考虑剩余模态的影响

(1) 理论模型

考虑剩余模态 $H_{efc}^R + jH_{efc}^I$ 时的频响函数

$$H_{ef}(\omega) = R_{efi} e^{j\varphi_{efi}} \frac{1}{1 - \Omega_{mi}^2 + j\eta_{mi}} + H_{efc}^R + jH_{efc}^I \quad (4.3-38)$$



$H_{efc}^R + jH_{efc}^I$ 使图 4.3-3(b) 中的导纳沿坐标轴正向移动 H_{efc}^R 和 H_{efc}^I , 如图 4.3-4 所示, 图中设 $H_{efc}^R > 0, H_{efc}^I < 0$ 。因此, 导纳圆方程为

图 4.3-4 考虑剩余模态时结构阻尼系统的导纳圆

$$x^2 + y^2 + ax + by + c = 0 \quad (4.3-39)$$

圆心为 $O_0\left(-\frac{a}{2}, -\frac{b}{2}\right)$, 半径

$$\rho_{efi} = \frac{R_{efi}}{2\eta_{mi}} = \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{b}{2}\right)^2} - c \quad (4.3-40)$$

(2) 模态参数识别

根据在主导模态共振点附近的 s 个频率点 $\omega_k (k=1, 2, \dots, s)$ 处频响函数实测值 $\tilde{H}_{ef}^R(\omega_k)$ $= \tilde{x}_k$ 、 $\tilde{H}_{ef}^I(\omega_k) = \tilde{y}_k$ 和理论值 $H_{ef}^R(\omega_k) = x_k$ 、 $H_{ef}^I(\omega_k) = y_k$ 构造目标函数, 即总方差

$$E = \sum_{k=1}^s (\tilde{x}_k^2 + \tilde{y}_k^2 + a\tilde{x}_k + b\tilde{y}_k + c) \quad (4.3-41)$$

令

$$\frac{\partial E}{\partial a} = 0, \frac{\partial E}{\partial b} = 0, \frac{\partial E}{\partial c} = 0$$

可解得 a 、 b 、 c 的最小二乘估计值即式(4.3-23), 进一步可求得对应的模态参数。

4.4 单模态识别之二: 差分法

差分法利用共振点附近实测频响函数值的差分直接估算模态参数。这种方法简单易行, 便于编程处理。但因属于直接估计, 且未考虑剩余模态影响, 所以精度不高。为了表示方便, 本节直接用不带上标“~”的符号表示实测数据。

4.4.1 理论模型

现以粘性阻尼系统为例推导不考虑剩余模态影响的频响函数表达式。粘性阻尼系统频响函数的留数展式为

$$H_{ef}(\omega) = \sum_{i=1}^n \left(\frac{R_{efi}}{j\omega - s_i} + \frac{R_{efi}^*}{j\omega - s_i^*} \right) \quad (1.6-33)$$

式中 R_{efi} 、 R_{efi}^* 为留数; s_i 、 s_i^* 为极点, 且

$$s_i = -\sigma_{mi} + j\omega_{mdi}, s_i^* = -\sigma_{mi} - j\omega_{mdi}$$

式中 σ_{mi} 、 ω_{mdi} 为复模态阻尼和复模态阻尼固有频率。将上式代入式(1.6-33), 得

$$H_{ef}(\omega) = \sum_{i=1}^n \left[\frac{R_{efi}}{-j(\omega_{mdi} - \omega + j\sigma_{mi})} + \frac{R_{efi}^*}{j(\omega_{mdi} + \omega - j\sigma_{mi})} \right] \quad (4.4-1)$$

令

$$r_{efi} = jR_{efi}, r_{efi}^* = -jR_{efi}^* \quad (4.4-2)$$

$$d = \omega_{mdi} - \omega, d' = \omega_{mdi} + \omega \quad (4.4-3)$$

则式(4.4-1)为

$$H_{ef}(\omega) = \sum_{i=1}^n \left(\frac{r_{efi}}{d + j\sigma_{mi}} + \frac{r_{efi}^*}{d' - j\sigma_{mi}} \right) \quad (4.4-4)$$

只考虑主导模态, 忽略剩余模态影响, 由上式得

$$H_{ef}(\omega) = \frac{r_{efi}}{d + j\sigma_{mi}} + \frac{r_{efi}^*}{d' - j\sigma_{mi}} \quad (4.4-5)$$

在主导模态共振点附近, 由式(4.4-3)知 $d \ll d'$, 且上式两个分式分母中的 σ_{mi} 为小量(小阻尼情况), 故上式第一个分式远大于第二个分式, 忽略第二个分式, 得

$$H_{ef}(\omega) = \frac{r_{efi}}{d + j\sigma_{mi}} \quad (4.4-6)$$

或简写为

$$H(\omega) = \frac{r_i}{d + j\sigma_{mi}} \quad (4.4-7)$$

此式为使用差分法做参数估计的数学模型。

4.4.2 模态参数识别

1. 复模态振型

设在主导模态共振点附近测得相邻两个频率点 ω_k, ω_{k-1} 处的频响函数 $H(\omega_k) = H_k, H(\omega_{k-1}) = H_{k-1}$, 由式(4.4-7), 应有

$$H_k = \frac{r_i}{d_k + j\sigma_{mi}} \quad (4.4-8)$$

$$H_{k-1} = \frac{r_i}{d_{k-1} + j\sigma_{mi}} \quad (4.4-9)$$

式中

$$d_k = \omega_{mdi} - \omega_k, d_{k-1} = \omega_{mdi} - \omega_{k-1}$$

式(4.4-8)乘以式(4.4-9)、式(4.4-8)减去式(4.4-9), 整理得

$$H_k H_{k-1} = \frac{r_i^2}{(d_k + j\sigma_{mi})(d_{k-1} + j\sigma_{mi})} \quad (4.4-10)$$

$$\Delta H_k = H_k - H_{k-1} = \frac{r_i(\omega_k - \omega_{k-1})}{(d_k + j\sigma_{mi})(d_{k-1} + j\sigma_{mi})} \quad (4.4-11)$$

式(4.4-10)除以式(4.4-11), 得

$$r_i = \frac{H_k H_{k-1}}{\Delta H_k} (\omega_k - \omega_{k-1}) \quad (4.4-12)$$

式中 r_i 即 r_{efi} , H_k 即 $H_{ef}(\omega_k)$, H_{k-1} 即 $H_{ef}(\omega_{k-1})$ 。

就识别的主导模态来说, 对确定的激励点 f 和响应点 e , r_{efi} 为常值, 但取不同的 H_k, H_{k-1} 所得 r_{efi} 略有不同。一般在共振区内取若干组 H_k, H_{k-1} , 将识别出的一组 r_{efi} 做线性平均, 得平均值 \bar{r}_{efi} 。由于 r_{efi} 与留数 R_{efi} 只差一常数因子 $2j$, 故 r_{efi} 也称为留数。固定激励点 f , 改变响应点 $e (e=1, 2, \dots, n)$, 将识别出的一组留数 $r_{efi} (e=1, 2, \dots, n)$ 组成列矢量, 即主导模态的复模态振型 $[\bar{r}_{1fi} \quad \bar{r}_{2fi} \quad \dots \quad \bar{r}_{nfi}]^T$ 。

2. 复模态频率和复模态阻尼

设

$$Y_k = \omega_k H_k, Y_{k-1} = \omega_{k-1} H_{k-1} \quad (4.4-13)$$

将式(4.4-8)、式(4.4-9)代入式(4.4-13), 令其相减, 整理得

$$\Delta Y_k = Y_k - Y_{k-1} = r_i \frac{(\omega_k - \omega_{k-1})(\omega_{mdi} + j\sigma_{mi})}{(d_k + j\sigma_{mi})(d_{k-1} + j\sigma_{mi})} \quad (4.4-14)$$

式(4.4-14)除以式(4.4-11), 得

$$\frac{\Delta Y_k}{\Delta H_k} = \omega_{mdi} + j\sigma_{mi} \quad (4.4-15)$$

式中

$$\Delta Y_k = \omega_k H_k - \omega_{k-1} H_{k-1} \quad (4.4-16)$$

$$\Delta H_k = H_k - H_{k-1} \quad (4.4-17)$$

则复模态阻尼固有频率

$$\omega_{m di} = \operatorname{Re} \left(\frac{\Delta Y_k}{\Delta H_k} \right) \quad (4.4-18)$$

复模态阻尼

$$\sigma_{mi} = \operatorname{Im} \left(\frac{\Delta Y_k}{\Delta H_k} \right) \quad (4.4-19)$$

复模态频率

$$\omega_{mi} = \sqrt{\omega_{m di}^2 + \sigma_{mi}^2} \quad (4.4-20)$$

复模态阻尼比

$$\zeta_{mi} = \frac{\sigma_{mi}}{\omega_{mi}} \quad (1.5-40)$$

如同估算留数 r_i 的处理方式,宜利用共振区内一组 H_k 、 H_{k-1} 求出一组 ω_{mi} 和 ζ_{mi} , 取其平均值 $\bar{\omega}_{mi}$ 和 $\bar{\zeta}_{mi}$ 作为该阶模态的模态参数。

4.5 多模态识别之一:非线性加权最小二乘法

单模态识别法估算模态参数的可靠性是建立在各阶模态耦合较小基础上的。对小阻尼且模态密集程度小的系统,采用单模态识别法能达到满意的效果。然而,模态耦合较大的情况是经常存在的,即使使用考虑剩余模态 $H_{efc}^R + jH_{efc}^I$ 的单模态识别法也不能满足精度要求。此时,必须重新建立频响函数的理论模型,将耦合较重的待识别模态同时考虑进去,用适当的参数识别方法估算出这些模态的模态参数,即多模态识别法。

根据所选频响函数数学模型不同,多模态识别有两类方法。一类以频响函数的模态展式为数学模型,包括非线性加权最小二乘法、直接偏导数法等;另一类以频响函数的有理分式为数学模型,包括 Levy 法(多项式拟合法)、正交多项式拟合法等方法。

无论何种数学模型,频响函数总是由分式组成。位于分式分子中的识别参数称为线性参数,位于分母中的识别参数称为非线性参数。线性参数识别一般用最小二乘法;非线性参数识别一般要用迭代法。迭代法所选用的非线性参数初值可由单模态识别法预估。

本节以结构阻尼系统为例介绍非线性加权最小二乘法。

4.5.1 理论模型

写出结构阻尼系统频响函数模态展式(1.5-80)中的一个元素

$$H_{ef}(\omega) = \sum_{i=1}^n \frac{m_{mi}}{m_{Di}} \cdot \frac{\psi_a \psi_{fi}}{k_{mi} - \omega^2 m_{mi} + jg_{mi}} \quad (4.5-1)$$

设待识别模态(拟合频段)为从第 n_1 到第 n_2 阶模态,将上式按模态阶数 $1 \sim n_1 - 1$ (低频段)、 $n_1 \sim n_2$ (拟合频段)、 $n_2 + 1 \sim n$ (高频段)分为三部分,写成

$$\begin{aligned}
H_{ef}(\omega) &= \sum_{i=1}^{n_1-1} \frac{m_{mi}}{m_{Di}} \cdot \frac{\psi_{ei}\psi_{fi}}{k_{mi} - \omega^2 m_{mi} + jg_{mi}} + \sum_{i=n_1}^{n_2} \frac{m_{mi}}{m_{Di}} \cdot \frac{\psi_{ei}\psi_{fi}}{k_{mi} - \omega^2 m_{mi} + jg_{mi}} \\
&+ \sum_{i=n_2+1}^n \frac{m_{mi}}{m_{Di}} \cdot \frac{\psi_{ei}\psi_{fi}}{k_{mi} - \omega^2 m_{mi} + jg_{mi}} \\
&= \sum_{i=1}^{n_1-1} \frac{\psi_{ei}\psi_{fi}}{m_{Di}\omega^2} \cdot \frac{1}{\left(\frac{\omega_{mi}}{\omega}\right)^2 - 1 + j\eta_{mi}\left(\frac{\omega_{mi}}{\omega}\right)} + \sum_{i=n_1}^{n_2} \frac{\psi_{ei}\psi_{fi}}{m_{Di}} \cdot \frac{1}{\omega_{mi}^2 - \omega^2 + j\omega_{mi}^2\eta_{mi}} \\
&+ \sum_{i=n_2+1}^n \frac{m_{mi}\psi_{ei}\psi_{fi}}{m_{Di}k_{mi}} \cdot \frac{1}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_{mi}}\right)^2 + j\eta_{mi}}
\end{aligned}$$

现考察拟合频段内的频响函数。拟合频段内的频率为 ω 。对低频段, $\frac{\omega_{mi}}{\omega} \ll 1 (i=1, 2, \dots, n_1-1)$; 对高频段, $\frac{\omega}{\omega_{mi}} \ll 1 (i=n_2+1, n_2+2, \dots, n)$ 。上式低频段和高频段内频响函数可简化, 于是得拟合频段内频响函数的近似表达式

$$H_{ef}(\omega) = - \sum_{i=1}^{n_1-1} \frac{\psi_{ei}\psi_{fi}}{m_{Di}\omega^2} + \sum_{i=n_1}^{n_2} \frac{\psi_{ei}\psi_{fi}}{m_{Di}} \cdot \frac{1}{\omega_{mi}^2 - \omega^2 + j\omega_{mi}^2\eta_{mi}} + \sum_{i=n_2+1}^n \frac{m_{mi}\psi_{ei}\psi_{fi}}{m_{Di}k_{mi}(1+j\eta_{mi})} \quad (4.5-2)$$

令

$$Y_{ef} = \sum_{i=1}^{n_1-1} \frac{\psi_{ei}\psi_{fi}}{m_{Di}} \quad (4.5-3)$$

$$Z_{ef} = \sum_{i=n_2+1}^n \frac{m_{mi}\psi_{ei}\psi_{fi}}{m_{Di}k_{mi}(1+j\eta_{mi})} \quad (4.5-4)$$

并简记 $\sum_{i=n_1}^{n_2}$ 为 $\sum_{i=1}^m$, $n_2 - n_1 + 1 = m$, 则式(4.5-2)成为

$$H_{ef}(\omega) = - \frac{Y_{ef}}{\omega^2} + \sum_{i=1}^m \frac{\psi_{ei}\psi_{fi}}{m_{Di}} \cdot \frac{1}{\omega_{mi}^2 - \omega^2 + j\omega_{mi}^2\eta_{mi}} + Z_{ef} \quad (4.5-5)$$

或

$$H_{ef}(\omega) = - \frac{Y_{ef}}{\omega^2} + \sum_{i=1}^m \frac{r_{efi}}{\omega_{mi}^2 - \omega^2 + j\omega_{mi}^2\eta_{mi}} + Z_{ef} \quad (4.5-6)$$

式中

$$r_{efi} = \frac{\psi_{ei}\psi_{fi}}{m_{Di}} \quad (4.5-7)$$

式(4.5-5)或(4.5-6)即为结构阻尼系统频响函数在拟合频段内的数学模型。其中 $-\frac{Y_{ef}}{\omega^2}$ 为低频段模态的影响项, 称为 $H_{ef}(\omega)$ 的修正质量项; Z_{ef} 为高频段模态的影响项, 称为 $H_{ef}(\omega)$ 的修正刚度项。事实上, 修正质量项反映了低频段模态的高频部分对拟合频段的影响, 而修正刚度项反映了高频段模态的低频部分对拟合频段的影响, 如图 4.5-1 所示。

在结构阻尼系统频响函数理论模型式(4.5-6)中, 待识别参数为 Y_{ef} 、 Z_{ef} 、 r_{efi} 、 ω_{mi} 、 η_{mi} (i

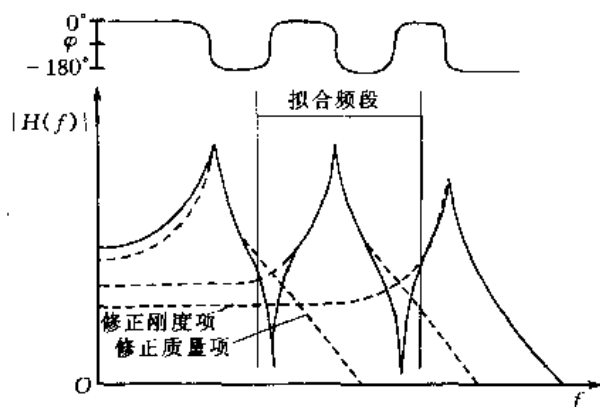


图 4.5-1 低频段和高频段对拟合频段之影响

$= 1, 2, \dots, m$), 共 $3m + 2$ 个。其中前三项为线性参数, 且为复数, $m + 2$ 个; 后两项为非线性参数, 为实数, $2m$ 个。

其他阻尼系统频响函数的数学模型如下:

$$\text{结构比例阻尼系统 } H_{ef}(\omega) = -\frac{Y_{ef}}{\omega^2} + \sum_{i=1}^m \frac{\varphi_{ei}\varphi_{fi}}{m_i} \cdot \frac{1}{\omega_i^2 - \omega^2 + j\omega_i^2\eta_i} + Z_{ef} \quad (4.5-8)$$

$$\text{粘性比例阻尼系统 } H_{ef}(\omega) = -\frac{Y_{ef}}{\omega^2} + \sum_{i=1}^m \frac{\varphi_{ei}\varphi_{fi}}{m_i} \cdot \frac{1}{\omega_i^2 - \omega^2 + j2\omega\omega_i\zeta_i} + Z_{ef} \quad (4.5-9)$$

$$\text{粘性阻尼系统 } H_{ef}(\omega) = -\frac{Y_{ef}}{\omega^2} + \sum_{i=1}^m \left(\frac{\psi_{ei}\psi_{fi}}{a_i} \cdot \frac{1}{j\omega - \lambda_i} + \frac{\psi_{ei}^*\psi_{fi}^*}{a_i^*} \cdot \frac{1}{j\omega - \lambda_i^*} \right) + Z_{ef} \quad (4.5-10)$$

式中 $\lambda_i = -\sigma_{mi} + j\omega_{mdi}$, $\lambda_i^* = -\sigma_{mi} - j\omega_{mdi}$ 。

上述几种理论模型的讨论如下:

①若拟合频段扩展到全部 n 阶模态, 则 $Y_{ef} = Z_{ef} = 0$, 此时频响函数模态展式即相应的数学模型。

②修正质量项 $-\frac{Y_{ef}}{\omega^2}$ 与 ω^2 成反比, 而修正刚度项 Z_{ef} 为常值, 故低频段对拟合频段的影响较高频段小。如果拟合频段内频率 ω 较大, 还可忽略低频段的修正质量项 $-\frac{Y_{ef}}{\omega^2}$, 只剩下常数项 Z_{ef} , 这就是单模态识别法中使用的剩余模态 $H_{efc}^R + jH_{efc}^I$ 。

③对粘性比例阻尼系统, 由于修正质量项和修正刚度项均为实数, 故只影响频响函数的实频部分, 而不影响虚频部分。因此, 用虚频做参数识别精度较高。

④对实模态系统, 如结构比例阻尼系统, 对原点频响函数, $Y_{ff} = \sum_{i=1}^{n_1-1} \frac{\varphi_{fi}^2}{m_i}$, $Z_{ff} = \sum_{i=n_2+1}^n \frac{\varphi_{fi}^2}{k_i(1+j\eta_i)}$, 式中 φ_{fi}^2 恒为正; 而对跨点频响函数, $Y_{ef} = \sum_{i=1}^{n_1-1} \frac{\varphi_{ei}\varphi_{fi}}{m_i}$, $Z_{ef} = \sum_{i=n_2+1}^n \frac{\varphi_{ei}\varphi_{fi}}{k_i(1+j\eta_i)}$, 式中 $\varphi_{ei}\varphi_{fi}$ 可正可负, 故跨点频响函数中的 Y_{ef} 、 Z_{ef} 较小。即拟合频段以外的模态对原点频响函数影响较大, 对跨点频响函数影响较小。故在模态参数识别时, 宜用跨点频响函

数去估算模态频率和模态阻尼。

4.5.2 模态参数识别

1. 线性参数识别

设实际测得拟合频段内 s 个频率点 $\omega_k (k=1, 2, \dots, s)$ 处的频响函数值 $\tilde{H}_{ef}(\omega_k)$, 并假定非线性参数 $\omega_{mi}, \eta_{mi} (i=1, 2, \dots, m)$ 为已知(第一次识别时, 可由单模态识别法预估), 对应实测频率点 ω_k 处频响函数的理论值为 $H_{ef}(\omega_k) (k=1, 2, \dots, s)$ 。由式(4.5-6), 写成矩阵形式为

$$\begin{bmatrix} H_{ef}(\omega_1) \\ H_{ef}(\omega_2) \\ \vdots \\ H_{ef}(\omega_s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{\omega_1^2} & \frac{1}{\omega_{m1}^2 - \omega_1^2 + j\omega_{m1}^2 \eta_{m1}} & \frac{1}{\omega_{m2}^2 - \omega_1^2 + j\omega_{m2}^2 \eta_{m2}} & \cdots & \frac{1}{\omega_{mm}^2 - \omega_1^2 + j\omega_{mm}^2 \eta_{mm}} & 1 \\ -\frac{1}{\omega_2^2} & \frac{1}{\omega_{m1}^2 - \omega_2^2 + j\omega_{m1}^2 \eta_{m1}} & \frac{1}{\omega_{m2}^2 - \omega_2^2 + j\omega_{m2}^2 \eta_{m2}} & \cdots & \frac{1}{\omega_{mm}^2 - \omega_2^2 + j\omega_{mm}^2 \eta_{mm}} & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ -\frac{1}{\omega_s^2} & \frac{1}{\omega_{m1}^2 - \omega_s^2 + j\omega_{m1}^2 \eta_{m1}} & \frac{1}{\omega_{m2}^2 - \omega_s^2 + j\omega_{m2}^2 \eta_{m2}} & \cdots & \frac{1}{\omega_{mm}^2 - \omega_s^2 + j\omega_{mm}^2 \eta_{mm}} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Y_{ef} \\ r_{ef1} \\ r_{ef2} \\ \vdots \\ r_{efm} \\ Z_{ef} \end{bmatrix} \quad (4.5-11)$$

或写成

$$\mathbf{H} = \mathbf{TP} \quad (4.5-12)$$

式中 \mathbf{H} 为由频响函数理论值构成的列向量, s 维; \mathbf{T} 为系数矩阵, $s \times (m+2)$ 阶; \mathbf{P} 为线性参数列向量, $(m+2)$ 维, 为待识别参量。

设 $\tilde{\mathbf{H}}$ 为由频响函数实测值 $\tilde{H}_{ef}(\omega_k) (k=1, 2, \dots, s)$ 构成的列向量, 它与 \mathbf{H} 存在误差即残差

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \tilde{\mathbf{H}} - \mathbf{TP} \quad (4.5-13)$$

根据加权最小二乘法, 构造目标函数

$$E_w = \boldsymbol{\varepsilon}^H \mathbf{W} \boldsymbol{\varepsilon} = (\tilde{\mathbf{H}} - \mathbf{TP})^H \mathbf{W} (\tilde{\mathbf{H}} - \mathbf{TP}) \quad (4.5-14)$$

式中 $\boldsymbol{\varepsilon}^H$ 表示 $\boldsymbol{\varepsilon}$ 的转置共轭, 权矩阵 \mathbf{W} 为实对角矩阵, $s \times s$ 阶。权矩阵 \mathbf{W} 为残差 $\boldsymbol{\varepsilon}$ 的协方差矩阵 \mathbf{C} 的逆矩阵

$$\mathbf{W} = \mathbf{C}^{-1} \quad (4.2-22)$$

其中协方差矩阵

$$\mathbf{C} = E[\boldsymbol{\varepsilon} \boldsymbol{\varepsilon}^H] \quad (4.2-21a)$$

E 表示数学期望。当 $\boldsymbol{\varepsilon}$ 为独立的均值为零的随机矢量时, \mathbf{C} 为对角矩阵。

令

$$\frac{\partial E_w}{\partial \mathbf{P}} = 0$$

得线性参数 \mathbf{P} 的马尔可夫估计

$$\mathbf{P} = (\mathbf{T}^H \mathbf{W} \mathbf{T})^{-1} \mathbf{T}^H \mathbf{W} \tilde{\mathbf{H}} \quad (4.5-15)$$

为无偏、有效估计。

上述马尔可夫估计为理想情况。事实上, 在第3章估算频响函数 $\tilde{H}_{ef}(\omega_k)$ 时, 已经使用了平均技术, 这里一般只用一次频响函数测试值 $\tilde{H}_{ef}(\omega_k)$ 估算模态参量, 因此, 无法由式(4.2-21a)得到对角矩阵形式的 \mathbf{C} 。实用的方法是, \mathbf{C} 只取 $\boldsymbol{\varepsilon} \boldsymbol{\varepsilon}^H$ 的对角线元素, 即

$$\mathbf{C} = \text{diag}[|\epsilon_k|^2] \quad (k=1, 2, \dots, s) \quad (4.5-16)$$

从而权矩阵

$$\mathbf{W} = \mathbf{C}^{-1} = \text{diag}\left[\frac{1}{|\epsilon_k|^2}\right] \quad (4.5-17)$$

上述权矩阵的含义是,在拟合频段内各共振点附近,频响函数 $\tilde{H}_{ef}(\omega_k)$ 信噪比高,误差 ϵ_k 较小,因而权值较大;反之,在反共振点附近,频响函数 $\tilde{H}_{ef}(\omega_k)$ 误差 ϵ_k 较大,所取权值较小。另外,首次估计时应取 $\mathbf{W} = \mathbf{I}$ 。这时由式(4.5-15)得到的 \mathbf{P} 为近似无偏、有效估计。

关于权矩阵 \mathbf{W} 更加实用的取法,有下面形式:

$$\mathbf{W} = \text{diag}[|H_{ef}(\omega_k)|] \quad (k=1, 2, \dots, s) \quad (4.5-18)$$

或

$$\mathbf{W} = \text{diag}[|H_{ef}(\omega_k)|^2] \quad (k=1, 2, \dots, s) \quad (4.5-19)$$

2. 非线性参数识别及识别的全过程

由上述过程识别出的线性参数 \mathbf{P} 是建立在假设非线性参数 ω_{mi} 、 η_{mi} 已知条件下的。即使由单模态识别法预估出 ω_{mi} 、 η_{mi} 的值,识别出的 \mathbf{P} 往往不满足精度要求。因此,必须修改 ω_{mi} 、 η_{mi} ,进行第二次迭代。重复这一过程,直到满足精度要求为止。下面给出非线性加权最小二乘法识别的全过程:

①根据实测频响函数,用单模态识别法预估拟合频段内复模态频率 $\omega_{mi}^{(0)}$ 、 $\eta_{mi}^{(0)}$ ($i=1, 2, \dots, m$);

②以 $\omega_{mi}^{(0)}$ 、 $\eta_{mi}^{(0)}$ 作为 ω_{mi} 、 η_{mi} 的初始值,进行首次迭代,由式(4.5-15)求得线性参数的第一次估计值 \mathbf{P}_1 ,并由式(4.5-14)计算首次估算的方差 E_{w1} ;

③一般地, E_{w1} 不满足预设的精度 μ ,即不满足 $E_{w1} \leq \mu$,给 $\omega_{mi}^{(0)}$ 、 $\eta_{mi}^{(0)}$ 一个微小变量 $\Delta\omega_{mi}^{(1)}$ 、 $\Delta\eta_{mi}^{(1)}$,得第二次迭代的

$$\begin{aligned} \omega_{mi}^{(1)} &= \omega_{mi}^{(0)} + \Delta\omega_{mi}^{(1)} \\ \eta_{mi}^{(1)} &= \eta_{mi}^{(0)} + \Delta\eta_{mi}^{(1)} \end{aligned}$$

由式(4.5-15)和式(4.5-14)求出第二次迭代的估计值 \mathbf{P}_2 和方差 E_{w2} ;

④验证是否满足 $E_{w2} \leq \mu$,若不满足,再次修改 $\omega_{mi}^{(1)}$ 、 $\eta_{mi}^{(1)}$,重复③,直至满足 $E_w \leq \mu$,此时的线性参数 \mathbf{P} 和非线性参数 ω_{mi} 、 η_{mi} 作为最终的参数估计值。

图 4.5-2 给出上述过程的流程图。

3. 模态参数识别

理论上讲,由任意两点间的频响函数 $\tilde{H}_{ef}(\omega_k)$ ($k=1, 2, \dots, s$) 按上述过程识别出的 ω_{mi} 、 η_{mi} ($i=1, 2, \dots, m$) 即为拟合频段内各阶模态的复模态频率和复模态阻尼比。对振型矢量,则需一组 $\tilde{H}_{ef}(\omega_k)$ 的数据(f 固定, $e=1, 2, \dots, n$) 识别出一组 n 个列向量 \mathbf{P} , 取其中的元素 r_{efi} , 当 f, i 固定, e 从 1 到 n 变化时组成的列向量 $[r_{1fi} \quad r_{2fi} \quad \dots \quad r_{nfi}]^T$ 为第 i 阶模态的复模态矢量,即振型矢量。

最后指出,非线性加权最小二乘法本身没有给出 $\Delta\omega_{mi}$ 、 $\Delta\eta_{mi}$ 的取法。若取法不当,势必引起 E_w 发散,而无法得到满足 $E_w \leq \mu$ 的各项参数。事实上, $\Delta\omega_{mi}$ 、 $\Delta\eta_{mi}$ 的取法即 ω_{mi} 、 η_{mi} 的变化方向仍可由最小二乘法确定,下一节直接偏导数法给出了这种方法。

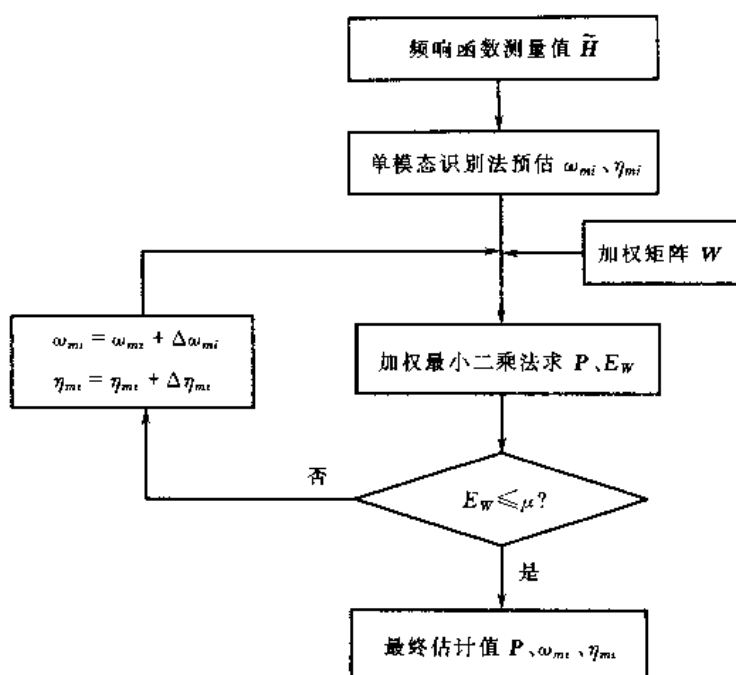


图 4.5-2 非线性加权最小二乘法流程图

4.6 多模态识别之二:直接偏导数法

现以粘性阻尼系统为例介绍直接偏导数法。

4.6.1 理论模型

拟合频段内粘性阻尼系统频响函数的数学模型为

$$H_{ef}(\omega) = -\frac{Y_{ef}}{\omega^2} + \sum_{i=1}^m \left(\frac{\phi_{ei}\phi_{fi}}{a_i} \cdot \frac{1}{j\omega - \lambda_i} + \frac{\phi_{ei}^*\phi_{fi}^*}{a_i^*} \cdot \frac{1}{j\omega - \lambda_i^*} \right) + Z_{ef} \quad (4.5-10)$$

式中 $\lambda_i = -\sigma_{mi} + j\omega_{mdi}$, $\lambda_i^* = -\sigma_{mi} - j\omega_{mdi}$ 。令

$$\left. \begin{aligned} Y_{ef} &= Y_R + jY_I, Z_{ef} = Z_R + jZ_I \\ \frac{\phi_{ei}\phi_{fi}}{a_i} &= U_i + jV_i, \frac{\phi_{ei}^*\phi_{fi}^*}{a_i^*} = U_i - jV_i \end{aligned} \right\} \quad (4.6-1)$$

为方便计,将 $H_{ef}(\omega)$ 简记为 $H(\omega)$,则式(4.5-10)成为

$$H(\omega) = -\frac{Y_R + jY_I}{\omega^2} + \sum_{i=1}^m \left[\frac{U_i + jV_i}{\sigma_{mi} + j(\omega - \omega_{mdi})} + \frac{U_i - jV_i}{\sigma_{mi} + j(\omega + \omega_{mdi})} \right] + Z_R + jZ_I \quad (4.6-2)$$

其实部和虚部分别为

$$H^R(\omega) = -\frac{Y_R}{\omega^2} + \sum_{i=1}^m \left[\frac{\sigma_{mi}U_i + (\omega - \omega_{mdi})V_i}{\sigma_{mi}^2 + (\omega - \omega_{mdi})^2} + \frac{\sigma_{mi}U_i - (\omega + \omega_{mdi})V_i}{\sigma_{mi}^2 + (\omega + \omega_{mdi})^2} \right] + Z_R \quad (4.6-3)$$

$$H^I(\omega) = -\frac{Y_I}{\omega^2} + \sum_{i=1}^m \left[\frac{\sigma_{mi}V_i - (\omega - \omega_{mdi})U_i}{\sigma_{mi}^2 + (\omega - \omega_{mdi})^2} - \frac{\sigma_{mi}V_i + (\omega + \omega_{mdi})U_i}{\sigma_{mi}^2 + (\omega + \omega_{mdi})^2} \right] + Z_I \quad (4.6-4)$$

其中待识别的线性参数为 $Y_R, Y_I, U_i, V_i (i=1, 2, \dots, m), Z_R, Z_I$ 共 $2m+4$ 个,非线性参数为

$\sigma_{mi}, \omega_{mdi} (i=1, 2, \dots, m)$ 共 $2m$ 个。待识别参数总数为 $4m+4$ 个, 均为实数。记线性参数列向量为 \mathbf{P} 、全部参数列向量为 \mathbf{Q} , 则

$$\mathbf{P} = [Y_R \quad Y_1 \quad U_1 \quad V_1 \quad U_2 \quad V_2 \quad \cdots \quad U_m \quad V_m \quad Z_R \quad Z_1]^T \quad (4.6-5)$$

$$\mathbf{Q} = [\mathbf{P}^T \quad \sigma_{m1} \quad \omega_{md1} \quad \sigma_{m2} \quad \omega_{md2} \quad \cdots \quad \sigma_{mm} \quad \omega_{mdm}]^T \quad (4.6-6)$$

\mathbf{P} 、 \mathbf{Q} 分别为 $(2m+4)$ 维、 $(4m+4)$ 维列向量。

以 $h_p (p=1, 2, \dots, 2m+4)$ 表示线性参数 $Y_R, Y_1, U_i, V_i (i=1, 2, \dots, m), Z_R, Z_1$, 将式 (4.6-3)、式 (4.6-4) 用偏导数表示为

$$H^R(\omega) = \sum_{p=1}^{2m+4} \frac{\partial H^R(\omega)}{\partial h_p} h_p = \sum_{p=1}^{2m+4} e_p(\omega) h_p = \mathbf{e}^T(\omega) \mathbf{P} \quad (4.6-7)$$

$$H^I(\omega) = \sum_{p=1}^{2m+4} \frac{\partial H^I(\omega)}{\partial h_p} h_p = \sum_{p=1}^{2m+4} f_p(\omega) h_p = \mathbf{f}^T(\omega) \mathbf{P} \quad (4.6-8)$$

式中

$$e_p(\omega) = \frac{\partial H^R(\omega)}{\partial h_p} \quad (p=1, 2, \dots, 2m+4) \quad (4.6-9)$$

$$f_p(\omega) = \frac{\partial H^I(\omega)}{\partial h_p} \quad (p=1, 2, \dots, 2m+4) \quad (4.6-10)$$

$$\mathbf{e}(\omega) = [e_1(\omega) \quad e_2(\omega) \quad \cdots \quad e_{2m+4}(\omega)]^T \quad (4.6-11)$$

$$\mathbf{f}(\omega) = [f_1(\omega) \quad f_2(\omega) \quad \cdots \quad f_{2m+4}(\omega)]^T \quad (4.6-12)$$

$\mathbf{e}(\omega)$ 、 $\mathbf{f}(\omega)$ 均为 $(2m+4)$ 维列向量。注意由于 $H^R(\omega)$ 、 $H^I(\omega)$ 中独立线性参数只有 $2m+2$ 个, 故 $\mathbf{e}(\omega)$ 、 $\mathbf{f}(\omega)$ 中各有 2 个分量为 0。

式 (4.6-7)、式 (4.6-8) 为直接偏导数法识别线性参数 \mathbf{P} 所使用的数学模型。

4.6.2 线性参数识别

假设非线性参数 $\sigma_{mi}, \omega_{mdi}$ 已知, 则可通过最小二乘法求线性参数 \mathbf{P} 。

设在拟合频段内获得 s 个频率点 ω_k 处的频响函数值 $\tilde{H}^R(\omega_k)$ 、 $\tilde{H}^I(\omega_k) (k=1, 2, \dots, s)$ 。写成列向量

$$\tilde{\mathbf{H}}^R = [\tilde{H}^R(\omega_1) \quad \tilde{H}^R(\omega_2) \quad \cdots \quad \tilde{H}^R(\omega_s)]^T \quad (4.6-13)$$

$$\tilde{\mathbf{H}}^I = [\tilde{H}^I(\omega_1) \quad \tilde{H}^I(\omega_2) \quad \cdots \quad \tilde{H}^I(\omega_s)]^T \quad (4.6-14)$$

均为 s 维。

对应频率点上频响函数的理论值为 $H^R(\omega_k)$ 、 $H^I(\omega_k)$, 由式 (4.6-7)、式 (4.6-8) 有

$$H^R(\omega_k) = \mathbf{e}^T(\omega_k) \mathbf{P} \quad (k=1, 2, \dots, s) \quad (4.6-15)$$

$$H^I(\omega_k) = \mathbf{f}^T(\omega_k) \mathbf{P} \quad (k=1, 2, \dots, s) \quad (4.6-16)$$

写成矩阵形式

$$\mathbf{H}^R = \mathbf{E}_P \mathbf{P} \quad (4.6-17)$$

$$\mathbf{H}^I = \mathbf{F}_P \mathbf{P} \quad (4.6-18)$$

式中

$$\mathbf{H}^R = [H^R(\omega_1) \quad H^R(\omega_2) \quad \cdots \quad H^R(\omega_s)]^T \quad (4.6-19)$$

$$\mathbf{H}^I = [H^I(\omega_1) \quad H^I(\omega_2) \quad \cdots \quad H^I(\omega_s)]^T \quad (4.6-20)$$

$$\mathbf{E}_P = \begin{bmatrix} e_1(\omega_1) & e_2(\omega_1) & \cdots & e_{2m+4}(\omega_1) \\ e_1(\omega_2) & e_2(\omega_2) & \cdots & e_{2m+4}(\omega_2) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ e_1(\omega_s) & e_2(\omega_s) & \cdots & e_{2m+4}(\omega_s) \end{bmatrix} \quad (4.6-21)$$

$$\mathbf{F}_P = \begin{bmatrix} f_1(\omega_1) & f_2(\omega_1) & \cdots & f_{2m+4}(\omega_1) \\ f_1(\omega_2) & f_2(\omega_2) & \cdots & f_{2m+4}(\omega_2) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ f_1(\omega_s) & f_2(\omega_s) & \cdots & f_{2m+4}(\omega_s) \end{bmatrix} \quad (4.6-22)$$

$\mathbf{H}^R, \mathbf{H}^I$ 为 s 维列向量, $\mathbf{E}_P, \mathbf{F}_P$ 为 $s \times (2m+4)$ 阶矩阵。

实测模型 $\tilde{\mathbf{H}}^R, \tilde{\mathbf{H}}^I$ 与理论模型 $\mathbf{H}^R, \mathbf{H}^I$ 存在误差

$$\boldsymbol{\varepsilon}^R = \tilde{\mathbf{H}}^R - \mathbf{E}_P \mathbf{P} \quad (4.6-23)$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}^I = \tilde{\mathbf{H}}^I - \mathbf{F}_P \mathbf{P} \quad (4.6-24)$$

构造目标函数(总方差)

$$\begin{aligned} E &= \boldsymbol{\varepsilon}^{R^T} \boldsymbol{\varepsilon}^R + \boldsymbol{\varepsilon}^{I^T} \boldsymbol{\varepsilon}^I \\ &= (\tilde{\mathbf{H}}^R - \mathbf{E}_P \mathbf{P})^T (\tilde{\mathbf{H}}^R - \mathbf{E}_P \mathbf{P}) + (\tilde{\mathbf{H}}^I - \mathbf{F}_P \mathbf{P})^T (\tilde{\mathbf{H}}^I - \mathbf{F}_P \mathbf{P}) \end{aligned} \quad (4.6-25)$$

根据最小二乘原理,令

$$\frac{\partial E}{\partial \mathbf{P}} = 0$$

得 \mathbf{P} 的最小二乘估计值

$$\mathbf{P} = (\mathbf{E}_P^T \mathbf{E}_P + \mathbf{F}_P^T \mathbf{F}_P)^{-1} (\mathbf{E}_P^T \tilde{\mathbf{H}}^R + \mathbf{F}_P^T \tilde{\mathbf{H}}^I) \quad (4.6-26)$$

3.6.3 参数增量识别

使用迭代法求非线性参数,必须给定 $\Delta\sigma_m, \Delta\omega_{mdi} (i=1, 2, \dots, m)$ 。令 $h_q (q=1, 2, \dots, 4m+4)$ 表示所有待识别参数 $Y_R, Y_I, U_i, V_i, Z_R, Z_I, \sigma_m, \omega_{mdi} (i=1, 2, \dots, m)$ 。这里用最小二乘法识别 Δh_q 或 $\Delta \mathbf{Q} = (\Delta h_1 \quad \Delta h_2 \quad \cdots \quad \Delta h_{4m+4})^T$, 以给出 \mathbf{Q} 的寻优方向。

设已通过上一段求出了所有参数的预估值 h_q 或 \mathbf{Q} , 将式(4.6-3)、式(4.6-4)在 h_q 处展成 Taylor 级数, 只保留一次项, 得

$$\begin{aligned} H^R(\omega, h_q + \Delta h_q) &= H^R(\omega, h_q) + \sum_{q=1}^{4m+4} e_q(\omega, h_q) \Delta h_q \\ &= H^R(\omega, h_q) + \mathbf{e}^T(\omega, h_q) \Delta \mathbf{Q} \end{aligned} \quad (4.6-27)$$

$$\begin{aligned} H^I(\omega, h_q + \Delta h_q) &= H^I(\omega, h_q) + \sum_{q=1}^{4m+4} f_q(\omega, h_q) \Delta h_q \\ &= H^I(\omega, h_q) + \mathbf{f}^T(\omega, h_q) \Delta \mathbf{Q} \end{aligned} \quad (4.6-28)$$

式中, $H^R(\omega, h_q), H^I(\omega, h_q)$ 表示以预估值 h_q 代入式(4.6-3)、式(4.6-4)后得到的值; $e_q(\omega, h_q), f_q(\omega, h_q), \mathbf{e}(\omega, h_q), \mathbf{f}(\omega, h_q)$ 的含义如下:

$$e_q(\omega, h_q) = \frac{\partial H^R(\omega, h_q)}{\partial h_q} \quad (q=1, 2, \dots, 4m+4) \quad (4.6-29)$$

$$f_q(\omega, h_q) = \frac{\partial H^1(\omega, h_q)}{\partial h_q} \quad (q=1, 2, \dots, 4m+4) \quad (4.6-30)$$

$$\mathbf{e}(\omega, h_q) = [e_1(\omega, h_q) \quad e_2(\omega, h_q) \quad \cdots \quad e_{4m+4}(\omega, h_q)]^T \quad (4.6-31)$$

$$\mathbf{f}(\omega, h_q) = [f_1(\omega, h_q) \quad f_2(\omega, h_q) \quad \cdots \quad f_{4m+4}(\omega, h_q)]^T \quad (4.6-32)$$

$\mathbf{e}(\omega, h_q)$ 、 $\mathbf{f}(\omega, h_q)$ 均为 $(4m+4)$ 维列向量。式(4.6-27)、式(4.6-28)为识别 ΔQ 的数学模型。

设在拟合频段 s 个频率点 ω_k 处获得了频响函数的实测值式(4.6-13)、式(4.6-14), 在已知预估值 h_q 的条件下, 基于式(4.6-27)、式(4.6-28)的对应理论值为

$$H^R(\omega_k, h_q + \Delta h_q) = H^R(\omega_k, h_q) + \mathbf{e}^T(\omega_k, h_q) \Delta Q \quad (k=1, 2, \dots, s) \quad (4.6-33)$$

$$H^I(\omega_k, h_q + \Delta h_q) = H^I(\omega_k, h_q) + \mathbf{f}^T(\omega_k, h_q) \Delta Q \quad (k=1, 2, \dots, s) \quad (4.6-34)$$

写成矩阵形式为

$$\mathbf{H}_\Delta^R = \mathbf{H}_q^R + \mathbf{E}_q \Delta Q \quad (4.6-35)$$

$$\mathbf{H}_\Delta^I = \mathbf{H}_q^I + \mathbf{F}_q \Delta Q \quad (4.6-36)$$

式中

$$\mathbf{H}_\Delta^R = [H^R(\omega_1, h_q + \Delta h_q) \quad H^R(\omega_2, h_q + \Delta h_q) \quad \cdots \quad H^R(\omega_s, h_q + \Delta h_q)]^T \quad (4.6-37)$$

$$\mathbf{H}_\Delta^I = [H^I(\omega_1, h_q + \Delta h_q) \quad H^I(\omega_2, h_q + \Delta h_q) \quad \cdots \quad H^I(\omega_s, h_q + \Delta h_q)]^T \quad (4.6-38)$$

$$\mathbf{H}_q^R = [H^R(\omega_1, h_q) \quad H^R(\omega_2, h_q) \quad \cdots \quad H^R(\omega_s, h_q)]^T \quad (4.6-39)$$

$$\mathbf{H}_q^I = [H^I(\omega_1, h_q) \quad H^I(\omega_2, h_q) \quad \cdots \quad H^I(\omega_s, h_q)]^T \quad (4.6-40)$$

$$\mathbf{E}_q = \begin{bmatrix} e_1(\omega_1, h_q) & e_2(\omega_1, h_q) & \cdots & e_{4m+4}(\omega_1, h_q) \\ e_1(\omega_2, h_q) & e_2(\omega_2, h_q) & \cdots & e_{4m+4}(\omega_2, h_q) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ e_1(\omega_s, h_q) & e_2(\omega_s, h_q) & \cdots & e_{4m+4}(\omega_s, h_q) \end{bmatrix} \quad (4.6-41)$$

$$\mathbf{F}_q = \begin{bmatrix} f_1(\omega_1, h_q) & f_2(\omega_1, h_q) & \cdots & f_{4m+4}(\omega_1, h_q) \\ f_1(\omega_2, h_q) & f_2(\omega_2, h_q) & \cdots & f_{4m+4}(\omega_2, h_q) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ f_1(\omega_s, h_q) & f_2(\omega_s, h_q) & \cdots & f_{4m+4}(\omega_s, h_q) \end{bmatrix} \quad (4.6-42)$$

\mathbf{H}_Δ^R 、 \mathbf{H}_Δ^I 、 \mathbf{H}_q^R 、 \mathbf{H}_q^I 均为 s 维列向量, \mathbf{E}_q 、 \mathbf{F}_q 为 $s \times (4m+4)$ 阶矩阵。

实测模型 $\tilde{\mathbf{H}}^R$ 、 $\tilde{\mathbf{H}}^I$ 与理论模型 \mathbf{H}_Δ^R 、 \mathbf{H}_Δ^I 存在误差

$$\boldsymbol{\varepsilon}_\Delta^R = \Delta \mathbf{H}^R - \mathbf{E}_q \Delta Q \quad (4.6-43)$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}_\Delta^I = \Delta \mathbf{H}^I - \mathbf{F}_q \Delta Q \quad (4.6-44)$$

式中

$$\Delta \mathbf{H}^R = \tilde{\mathbf{H}}^R - \mathbf{H}_q^R \quad (4.6-45)$$

$$\Delta \mathbf{H}^I = \tilde{\mathbf{H}}^I - \mathbf{H}_q^I \quad (4.6-46)$$

构造目标函数(总方差)

$$\begin{aligned} E_\Delta &= \boldsymbol{\varepsilon}_\Delta^{RT} \boldsymbol{\varepsilon}_\Delta^R + \boldsymbol{\varepsilon}_\Delta^{IT} \boldsymbol{\varepsilon}_\Delta^I \\ &= (\Delta \mathbf{H}^R - \mathbf{E}_q \Delta Q)^T (\Delta \mathbf{H}^R - \mathbf{E}_q \Delta Q) + (\Delta \mathbf{H}^I - \mathbf{F}_q \Delta Q)^T (\Delta \mathbf{H}^I - \mathbf{F}_q \Delta Q) \end{aligned} \quad (4.6-47)$$

根据最小二乘原理, 令

$$\frac{\partial E_{\Delta}}{\partial(\Delta Q)}=0$$

得 ΔQ 的最小二乘估计值

$$\Delta Q = (E_q^T E_q + F_q^T F_q)^{-1} (E_q^T \Delta H^R + F_q^T \Delta H^I) \quad (4.6-48)$$

4.6.4 参数识别的全过程

①由单模态识别法求出非线性参数的预估值 $\sigma_m^{(0)}$ 、 $\omega_{md}^{(0)}$ ($i=1,2,\dots,m$)

②由式(4.6-26)求出线性参数的估计值 P_0 , 则参数预估值

$$Q_0 = [P_0^T \quad \sigma_{m1}^{(0)} \quad \omega_{md1}^{(0)} \quad \sigma_{m2}^{(0)} \quad \omega_{md2}^{(0)} \quad \cdots \quad \sigma_{mm}^{(0)} \quad \omega_{mdm}^{(0)}]^T \quad (4.6-49)$$

③由式(4.6-48)求出参数增量 ΔQ_1 , 由式(4.6-47)求出方差 E_{Δ} , 则第一次迭代后参数向量为

$$Q_1 = Q_0 + \Delta Q_1 \quad (4.6-50)$$

④对给定误差精度 μ , 检验 $E_{\Delta} \leq \mu$ 是否成立。若不成立, 以 Q_1 为基础, 重复步骤③, 直到满足精度要求, Q 即为最终识别参数。由 Q 可求出各阶模态参数。

4.7 多模态识别之三: Levy 法

Levy 法做参数识别的数学模型采用频响函数的有理分式形式。由于未使用简化的模态展式, 理论模型是精确的, 因而有较高的识别精度, 但计算工作量大。Levy 法又称为多项式拟合法。

4.7.1 理论模型

频响函数的有理分式为

$$H_{ef}(\omega) = \frac{\alpha_0 + \alpha_1(j\omega) + \cdots + \alpha_{2n-2}(j\omega)^{2n-2}}{1 + \beta_1(j\omega) + \cdots + \beta_{2n}(j\omega)^{2n}} \quad (1.6-32)$$

或写成

$$H_{ef}(\omega) = \frac{\sum_{i=0}^{2n-2} \alpha_i p_i(j\omega)}{\sum_{i=0}^{2n} \beta_i q_i(j\omega)} = \frac{p^T(j\omega) \alpha}{1 + q^T(j\omega) \beta} = \frac{N_{ef}(j\omega)}{\Delta(j\omega)} \quad (4.7-1)$$

式中

$$p_i(j\omega) = (j\omega)^i, q_i(j\omega) = (j\omega)^i \quad (4.7-2)$$

$$\left. \begin{aligned} p(j\omega) &= [p_0(j\omega) \quad p_1(j\omega) \quad \cdots \quad p_{2n-2}(j\omega)]^T \\ q(j\omega) &= [q_1(j\omega) \quad q_2(j\omega) \quad \cdots \quad q_{2n}(j\omega)]^T \end{aligned} \right\} \quad (4.7-3)$$

$$\alpha = [\alpha_0 \quad \alpha_1 \quad \cdots \quad \alpha_{2n-2}]^T \quad (4.7-4)$$

$$\beta = [\beta_1 \quad \beta_2 \quad \cdots \quad \beta_{2n}]^T \quad (4.7-5)$$

$$N_{ef}(j\omega) = \sum_{i=0}^{2n-2} \alpha_i p_i(j\omega) = p^T(j\omega) \alpha \quad (4.7-6)$$

$$\Delta(j\omega) = \sum_{i=0}^{2n} \beta_i q_i(j\omega) = 1 + \mathbf{q}^T(j\omega) \boldsymbol{\beta} \quad (4.7-7)$$

$$\beta_0 = 1$$

$\mathbf{p}(j\omega)$ 为 $(2n-1)$ 维复列向量, $\mathbf{q}(j\omega)$ 为 $2n$ 维复列向量, $\boldsymbol{\alpha}$ 为 $(2n-1)$ 维实列向量, $\boldsymbol{\beta}$ 为 $2n$ 维实列向量。

式(4.7-1)即为 Levy 法使用的频响函数数学模型,待识别参数为 $\boldsymbol{\alpha}$ 、 $\boldsymbol{\beta}$ 。其中 $\boldsymbol{\alpha}$ 为线性参数, $\boldsymbol{\beta}$ 为非线性参数。

4.7.2 参数识别

设实测频率点 ω_k 处的频响函数为 $\tilde{H}_{ef}(\omega_k) = \tilde{H}(\omega_k)$, 对应的理论值为 $H_{ef}(\omega_k) = H(\omega_k)$ ($k=1, 2, \dots, s$)。由式(4.7-1)知

$$H(\omega_k) = \frac{N_{ef}(j\omega_k)}{\Delta(j\omega_k)} = \frac{N(j\omega_k)}{\Delta(j\omega_k)} \quad (k=1, 2, \dots, s) \quad (4.7-8)$$

实测频响函数 $\tilde{H}(\omega_k)$ 与理论值 $H(\omega_k)$ 之间的误差

$$\varepsilon(\omega_k) = \frac{N(j\omega_k)}{\Delta(j\omega_k)} - \tilde{H}(\omega_k) \quad (k=1, 2, \dots, s) \quad (4.7-9)$$

将 $\Delta(j\omega_k)$ 中包含的非线性参数 $\boldsymbol{\beta}$ 线性化, 引入加权误差函数

$$\begin{aligned} e(\omega_k) &= \varepsilon(\omega_k) \Delta(j\omega_k) = N(j\omega_k) - \tilde{H}(\omega_k) \Delta(j\omega_k) \\ &= \mathbf{p}^T(j\omega_k) \boldsymbol{\alpha} - \tilde{H}(\omega_k) [1 + \mathbf{q}^T(j\omega_k) \boldsymbol{\beta}] \\ &= \mathbf{p}^T(j\omega_k) \boldsymbol{\alpha} - \tilde{H}(\omega_k) \mathbf{q}^T(j\omega_k) \boldsymbol{\beta} - \tilde{H}(\omega_k) \quad (k=1, 2, \dots, s) \end{aligned} \quad (4.7-10)$$

写成矩阵形式

$$\mathbf{e} = \mathbf{P}\boldsymbol{\alpha} - \mathbf{Q}\boldsymbol{\beta} - \tilde{\mathbf{H}} \quad (4.7-11)$$

式中

$$\mathbf{e} = [e(\omega_1) \quad e(\omega_2) \quad \cdots \quad e(\omega_s)]^T \quad (4.7-12)$$

$$\tilde{\mathbf{H}} = [\tilde{H}(\omega_1) \quad \tilde{H}(\omega_2) \quad \cdots \quad \tilde{H}(\omega_s)]^T \quad (4.7-13)$$

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} p_0(j\omega_1) & p_1(j\omega_1) & \cdots & p_{2n-2}(j\omega_1) \\ p_0(j\omega_2) & p_1(j\omega_2) & \cdots & p_{2n-2}(j\omega_2) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ p_0(j\omega_s) & p_1(j\omega_s) & \cdots & p_{2n-2}(j\omega_s) \end{bmatrix} \quad (4.7-14)$$

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} \tilde{H}(\omega_1)q_1(j\omega_1) & \tilde{H}(\omega_1)q_2(j\omega_1) & \cdots & \tilde{H}(\omega_1)q_{2n}(j\omega_1) \\ \tilde{H}(\omega_2)q_1(j\omega_2) & \tilde{H}(\omega_2)q_2(j\omega_2) & \cdots & \tilde{H}(\omega_2)q_{2n}(j\omega_2) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \tilde{H}(\omega_s)q_1(j\omega_s) & \tilde{H}(\omega_s)q_2(j\omega_s) & \cdots & \tilde{H}(\omega_s)q_{2n}(j\omega_s) \end{bmatrix} \quad (4.7-15)$$

\mathbf{e} 、 $\tilde{\mathbf{H}}$ 为 s 维复列向量, \mathbf{P} 为 $s \times (2n-1)$ 阶复矩阵, \mathbf{Q} 为 $s \times 2n$ 阶复矩阵。

根据复数最小二乘法, 构造目标函数

$$E = \mathbf{e}^H \mathbf{e} = (\mathbf{P}\boldsymbol{\alpha} - \mathbf{Q}\boldsymbol{\beta} - \tilde{\mathbf{H}})^H (\mathbf{P}\boldsymbol{\alpha} - \mathbf{Q}\boldsymbol{\beta} - \tilde{\mathbf{H}}) \quad (4.7-16)$$

令

$$\frac{\partial E}{\partial \boldsymbol{\alpha}} = 0, \quad \frac{\partial E}{\partial \boldsymbol{\beta}} = 0$$

得

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{P}^H \mathbf{P} \boldsymbol{\alpha} - \operatorname{Re}(\mathbf{P}^H \mathbf{Q} \boldsymbol{\beta}) - \operatorname{Re}(\mathbf{P}^H \tilde{\mathbf{H}}) &= \mathbf{0} \\ \mathbf{Q}^H \mathbf{Q} \boldsymbol{\beta} - \operatorname{Re}(\mathbf{Q}^H \mathbf{P} \boldsymbol{\alpha}) + \operatorname{Re}(\mathbf{Q}^H \tilde{\mathbf{H}}) &= \mathbf{0} \end{aligned} \right\} \quad (4.7-17)$$

合并成一个矩阵方程

$$\begin{bmatrix} \mathbf{C} & \mathbf{B} \\ \mathbf{B}^T & \mathbf{D} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\alpha} \\ \boldsymbol{\beta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{f} \\ \mathbf{g} \end{bmatrix} \quad (4.7-18)$$

式中

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{C} &= \mathbf{P}^H \mathbf{P}, \mathbf{D} = \mathbf{Q}^H \mathbf{Q} \\ \mathbf{B} &= -\operatorname{Re}(\mathbf{P}^H \mathbf{Q}) \\ \mathbf{f} &= \operatorname{Re}(\mathbf{P}^H \tilde{\mathbf{H}}), \mathbf{g} = -\operatorname{Re}(\mathbf{Q}^H \tilde{\mathbf{H}}) \end{aligned} \right\} \quad (4.7-19)$$

\mathbf{C} 为 $(2n-1)$ 阶实方阵, \mathbf{D} 为 $2n$ 阶实方阵, \mathbf{B} 为 $(2n-1) \times 2n$ 阶实矩阵, \mathbf{f} 为 $(2n-1)$ 阶实列阵, \mathbf{g} 为 $2n$ 阶实列阵。式(4.7-18)进一步写成简化形式

$$\mathbf{A} \boldsymbol{\gamma} = \mathbf{r} \quad (4.7-20)$$

式中

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{C} & \mathbf{B} \\ \mathbf{B}^T & \mathbf{D} \end{bmatrix}, \boldsymbol{\gamma} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\alpha} \\ \boldsymbol{\beta} \end{bmatrix}, \mathbf{r} = \begin{bmatrix} \mathbf{f} \\ \mathbf{g} \end{bmatrix} \quad (4.7-21)$$

\mathbf{A} 为 $(4n-1)$ 阶实方阵, $\boldsymbol{\gamma}, \mathbf{r}$ 为 $(4n-1)$ 阶实列阵。

可以证明, \mathbf{A} 非负定。当 \mathbf{A} 正定时, 可以求得 $\boldsymbol{\gamma}$ 的最小二乘估计

$$\boldsymbol{\gamma} = \mathbf{A}^{-1} \mathbf{r} \quad (4.7-22)$$

4.7.3 改进的参数识别

上述过程得到的最小二乘估计 $\boldsymbol{\gamma}$ 使 E 或 $e(\omega_k)$ 最小, 由于引入了权函数 $\Delta(j\omega_k), \epsilon(\omega_k)$ 不一定最小。为了消除这种误差, 引入新的误差函数

$$e'(\omega_k) = \frac{e(\omega_k)}{(\Delta(j\omega_k))^\rho} = \frac{e(\omega_k)}{\Delta^\rho(j\omega_k)} \quad (k=1, 2, \dots, s) \quad (4.7-23)$$

其中 $\Delta(j\omega_k)$ 为根据上面估算出的 $\boldsymbol{\beta}$ 由式(4.7-7)求得的值, ρ 为幂指数, $0 < \rho \leq 1$ 。将式(4.7-10)代入式(4.7-23), 得 $e'(\omega_k)$ 并写成矩阵形式

$$\mathbf{e}' = \mathbf{P}' \boldsymbol{\alpha} - \mathbf{Q}' \boldsymbol{\beta} - \tilde{\mathbf{H}}' \quad (4.7-24)$$

式中

$$\mathbf{e}' = \begin{bmatrix} \frac{e(\omega_1)}{\Delta^\rho(j\omega_1)} & \frac{e(\omega_2)}{\Delta^\rho(j\omega_2)} & \dots & \frac{e(\omega_s)}{\Delta^\rho(j\omega_s)} \end{bmatrix}^T \quad (4.7-25)$$

$$\tilde{\mathbf{H}}' = \begin{bmatrix} \frac{\tilde{H}(\omega_1)}{\Delta^\rho(j\omega_1)} & \frac{\tilde{H}(\omega_2)}{\Delta^\rho(j\omega_2)} & \dots & \frac{\tilde{H}(\omega_s)}{\Delta^\rho(j\omega_s)} \end{bmatrix}^T \quad (4.7-26)$$

$$\mathbf{P}' = \begin{bmatrix} \frac{p_0(j\omega_1)}{\Delta^p(j\omega_1)} & \frac{p_1(j\omega_1)}{\Delta^p(j\omega_1)} & \cdots & \frac{p_{2n-2}(j\omega_1)}{\Delta^p(j\omega_1)} \\ \frac{p_0(j\omega_2)}{\Delta^p(j\omega_2)} & \frac{p_1(j\omega_2)}{\Delta^p(j\omega_2)} & \cdots & \frac{p_{2n-2}(j\omega_2)}{\Delta^p(j\omega_2)} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{p_0(j\omega_s)}{\Delta^p(j\omega_s)} & \frac{p_1(j\omega_s)}{\Delta^p(j\omega_s)} & \cdots & \frac{p_{2n-2}(j\omega_s)}{\Delta^p(j\omega_s)} \end{bmatrix} \quad (4.7-27)$$

$$\mathbf{Q}' = \begin{bmatrix} \frac{\tilde{H}(\omega_1)q_1(j\omega_1)}{\Delta^p(j\omega_1)} & \frac{\tilde{H}(\omega_1)q_2(j\omega_1)}{\Delta^p(j\omega_1)} & \cdots & \frac{\tilde{H}(\omega_1)q_{2n}(j\omega_1)}{\Delta^p(j\omega_1)} \\ \frac{\tilde{H}(\omega_2)q_1(j\omega_2)}{\Delta^p(j\omega_2)} & \frac{\tilde{H}(\omega_2)q_2(j\omega_2)}{\Delta^p(j\omega_2)} & \cdots & \frac{\tilde{H}(\omega_2)q_{2n}(j\omega_2)}{\Delta^p(j\omega_2)} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\tilde{H}(\omega_s)q_1(j\omega_s)}{\Delta^p(j\omega_s)} & \frac{\tilde{H}(\omega_s)q_2(j\omega_s)}{\Delta^p(j\omega_s)} & \cdots & \frac{\tilde{H}(\omega_s)q_{2n}(j\omega_s)}{\Delta^p(j\omega_s)} \end{bmatrix} \quad (4.7-28)$$

构造目标函数

$$E' = \mathbf{e}'^H \mathbf{e}' \quad (4.7-29)$$

并令

$$\frac{\partial E'}{\partial \boldsymbol{\alpha}} = 0, \frac{\partial E'}{\partial \boldsymbol{\beta}} = 0$$

仿照式(4.7-16)~式(4.7-22)的步骤,可求新的参数估计

$$\boldsymbol{\gamma}' = \mathbf{A}'^{-1} \mathbf{r}' \quad (4.7-30)$$

验证是否满足 $E' \leq \mu$, μ 为指定精度。如不满足,重复上述步骤,直至满足精度要求。

4.7.4 估算模态参数

识别出参数 $\boldsymbol{\gamma}$ 或 $\boldsymbol{\alpha}$ 、 $\boldsymbol{\beta}$ 后,可进一步估算模态参数。

将 $\boldsymbol{\beta}$ 代入特征方程式(1.6-13),解得 n 对共轭复特征值 s_i 和 s_i^* ,从而得复模态阻尼 σ_{mi} 和复模态阻尼固有频率 ω_{mdi} ,进一步可求得各阶模态的复模态频率 ω_{mi} 和复模态阻尼比 ζ_{mi} 。

将 $\boldsymbol{\alpha}$ 和 $\boldsymbol{\beta}$ 代入式(1.6-29),可估算出留数 R_{efi} ($i=1,2,\cdots,n$)。固定激励点 f ,由测得的各响应点频响函数 $\tilde{H}_{ef}(\omega)$ ($e=1,2,\cdots,n$)估算出一组 n 个留数 R_{efi} ,将其组成列阵,得留数矢量 $\mathbf{R}_i = [R_{1fi} \ R_{2fi} \ \cdots \ R_{nfi}]^T$ ($i=1,2,\cdots,n$),即各阶模态的振型矢量,为复列矢量。

最后指出,当识别模态数 n 较大时, \mathbf{A} 矩阵阶数很大(为 $4n-1$ 阶方阵),容易出现病态。改进方法有两种:

①在式(4.7-1)和式(4.7-9)中引入无量纲频率 $\Omega_k = \frac{\omega_k}{\omega_0}$, ω_0 为选定的特征频率,可识别出无量纲模态参数

$$\begin{aligned} \bar{s}_i &= -\bar{\sigma}_{mi} + j\bar{\omega}_{mdi} \\ \bar{s}_i^* &= -\bar{\sigma}_{mi} - j\bar{\omega}_{mdi} \\ \bar{\sigma}_{mi} &= -\operatorname{Re}\bar{s}_i, \bar{\omega}_{mdi} = \operatorname{Im}\bar{s}_i \\ \omega_{mi} &= \sqrt{\bar{\omega}_{mdi}^2 + \bar{\sigma}_{mi}^2}, \zeta_{mi} = \frac{\bar{\sigma}_{mi}}{\omega_{mi}} \end{aligned}$$

②简化矩阵 \mathbf{A} 。将式(4.7-1)中的幂多项式 $p_i(j\omega)$ 、 $q_i(j\omega)$ 改为正交多项式,通过将实测频率点 $\omega_k (k=1, 2, \dots, s)$ 扩展到 ω_{-k} 和 ω_k 。利用正交多项式的正交性,可使式(4.7-18)中的 \mathbf{C} 、 \mathbf{D} 成为单位阵,从而使求解 γ 的问题转为分别求解 α 和 β 。这种方法称为正交多项式拟合法,下节将详细介绍。

4.8 多模态识别之四:正交多项式拟合法

正交多项式拟合法所用频响函数的数学模型仍为

$$H_{ef}(\omega) = \frac{\sum_{i=0}^{2n-2} \alpha_i p_i(j\omega)}{\sum_{i=0}^{2n} \beta_i q_i(j\omega)} = \frac{\mathbf{p}^T(j\omega) \boldsymbol{\alpha}}{1 + \mathbf{q}^T(j\omega) \boldsymbol{\beta}} = \frac{N_{ef}(j\omega)}{\Delta(j\omega)} \quad (4.7-1)$$

式中 $p_i(j\omega)$ 和 $q_i(j\omega)$ 为某种正交多项式,其余符号含义见式(4.7-3)~式(4.7-7), $\beta_0 = 1$ 。

今测得 s 个频率点上的频响函数值 $\tilde{H}_{ef}(\omega_k) = \tilde{H}(\omega_k)$, 对应理论值 $H_{ef}(\omega_k) = H(\omega_k) (k=1, 2, \dots, s)$, 如式(4.7-8)。为了利用正交多项式的正交性,将上述 s 个正频率点 ω_k 扩展到 s 个负频率点 ω_{-k} , 并令

$$\left. \begin{aligned} \omega_{-k} &= -\omega_k \\ H(\omega_{-k}) &= H(-\omega_k) = H^*(\omega_k) \\ \tilde{H}(\omega_{-k}) &= \tilde{H}(-\omega_k) = \tilde{H}^*(\omega_k) \end{aligned} \right\} \quad (4.8-1)$$

从而式(4.7-1)、式(4.7-8)~式(4.7-10)中的 k 值范围扩大为:

$$k = -s, -s+1, \dots, -1, 1, 2, \dots, s$$

将加权误差函数式(4.7-10)写成矩阵形式,仍形如

$$\mathbf{e} = \mathbf{P}\boldsymbol{\alpha} - \mathbf{Q}\boldsymbol{\beta} - \tilde{\mathbf{H}} \quad (4.7-11)$$

但式中

$$\mathbf{e} = [e(\omega_{-s}) \quad e(\omega_{-s+1}) \quad \cdots \quad e(\omega_{-1}) \quad e(\omega_1) \quad e(\omega_2) \quad \cdots \quad e(\omega_s)]^T \quad (4.8-2)$$

$$\tilde{\mathbf{H}} = [\tilde{H}(\omega_{-s}) \quad \tilde{H}(\omega_{-s+1}) \quad \cdots \quad \tilde{H}(\omega_{-1}) \quad \tilde{H}(\omega_1) \quad \tilde{H}(\omega_2) \quad \cdots \quad \tilde{H}(\omega_s)]^T \quad (4.8-3)$$

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} \mathbf{P}_- \\ \mathbf{P}_+ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_0(j\omega_{-s}) & p_1(j\omega_{-s}) & \cdots & p_{2n-2}(j\omega_{-s}) \\ p_0(j\omega_{-s+1}) & p_1(j\omega_{-s+1}) & \cdots & p_{2n-2}(j\omega_{-s+1}) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ p_0(j\omega_{-1}) & p_1(j\omega_{-1}) & \cdots & p_{2n-2}(j\omega_{-1}) \\ p_0(j\omega_1) & p_1(j\omega_1) & \cdots & p_{2n-2}(j\omega_1) \\ p_0(j\omega_2) & p_1(j\omega_2) & \cdots & p_{2n-2}(j\omega_2) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ p_0(j\omega_s) & p_1(j\omega_s) & \cdots & p_{2n-2}(j\omega_s) \end{bmatrix} \quad (4.8-4)$$

$$Q = \begin{bmatrix} Q_- \\ Q_+ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{H}(\omega_{-s})q_1(j\omega_{-s}) & \tilde{H}(\omega_{-s})q_2(j\omega_{-s}) & \cdots & \tilde{H}(\omega_{-s})q_{2n}(j\omega_{-s}) \\ \tilde{H}(\omega_{-s+1})q_1(j\omega_{-s+1}) & \tilde{H}(\omega_{-s+1})q_2(j\omega_{-s+1}) & \cdots & \tilde{H}(\omega_{-s+1})q_{2n}(j\omega_{-s+1}) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \tilde{H}(\omega_{-1})q_1(j\omega_{-1}) & \tilde{H}(\omega_{-1})q_2(j\omega_{-1}) & \cdots & \tilde{H}(\omega_{-1})q_{2n}(j\omega_{-1}) \\ \tilde{H}(\omega_1)q_1(j\omega_1) & \tilde{H}(\omega_1)q_2(j\omega_1) & \cdots & \tilde{H}(\omega_1)q_{2n}(j\omega_1) \\ \tilde{H}(\omega_2)q_1(j\omega_2) & \tilde{H}(\omega_2)q_2(j\omega_2) & \cdots & \tilde{H}(\omega_2)q_{2n}(j\omega_2) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \tilde{H}(\omega_s)q_1(j\omega_s) & \tilde{H}(\omega_s)q_2(j\omega_s) & \cdots & \tilde{H}(\omega_s)q_{2n}(j\omega_s) \end{bmatrix} \quad (4.8-5)$$

α 、 β 仍如式(4.7-4)、式(4.7-5), e 、 \tilde{H} 为 $2s$ 阶复列阵, P 为 $2s \times (2n-1)$ 阶复矩阵, Q 为 $2s \times 2n$ 阶复矩阵。

构造形如式(4.7-16)的目标函数

$$E = e^H e = (P\alpha - Q\beta - \tilde{H})^H (P\alpha - Q\beta - \tilde{H}) \quad (4.7-16)$$

根据最小二乘法, 令

$$\frac{\partial E}{\partial \alpha} = 0, \frac{\partial E}{\partial \beta} = 0$$

得形如式(4.7-18)的方程组

$$\begin{bmatrix} C & B \\ B^T & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f \\ g \end{bmatrix} \quad (4.7-18)$$

式中各符号如式(4.7-19)所示, 且阶数未变。但是, 适当选取正交多项式 $p_i(j\omega)$ 和 $q_i(j\omega)$, 可使 C 和 D 成为单位矩阵, 即

$$C = P^H P = I \quad (2n-1) \times (2n-1) \text{ 阶} \quad (4.8-6)$$

$$D = Q^H Q = I \quad 2n \times 2n \text{ 阶} \quad (4.8-7)$$

则式(4.7-18)成为

$$\begin{bmatrix} I & B \\ B^T & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f \\ g \end{bmatrix} \quad (4.8-8)$$

展开得两个独立的方程组

$$(I - BB^T)\alpha = f - Bg \quad (4.8-9)$$

$$\beta = g - B^T \alpha \quad (4.8-10)$$

解得 α 和 β 的最小二乘估计

$$\left. \begin{aligned} \alpha &= (I - BB^T)^{-1}(f - Bg) \\ \beta &= g - B^T \alpha \end{aligned} \right\} \quad (4.8-11)$$

由于 $(I - BB^T)$ 阶数为 $(2n-1) \times (2n-1)$, 与 A 相比, 阶数几乎降低一半, 故大大减少了计算工作量, 同时降低了病态矩阵出现的可能性。

不同软件中有不同正交多项式的选取方法。如美国 SDRC 公司的 SMS 模态分析软件采用了弗赛斯正交多项式; 美国 HP 公司的 HPME90 模态分析系统采用了切比雪夫正交多项式。而后者在递推阶段系数计算量小, 故速度较快。

4.9 分区模态综合法

前述各种参数识别方法均利用了频响函数矩阵的一列或一行元素。在单点激励方式下, 这些频响函数很容易得到。对较大型结构, 由于单点激励能量有限, 在测得的一列或一行频响函数中, 远离激励点的频响函数信噪比很低, 以此为基础识别的振型精度也很低, 甚至无法得到结构的整体振型。分区模态综合法能较好地解决这一问题。

4.9.1 实模态系统

假设被测结构为粘性比例阻尼系统, 如将结构分成 4 个测试区, 采用随机锤击激励信号, 在单点激励方式下得到式(2.3-8)中频响函数矩阵第 c 列前半部分 \mathbf{H}_c^A 和第 l 列后半部分 \mathbf{H}_l^B

$$\mathbf{H}_c^A = [H_{1c} \quad H_{2c} \quad \cdots \quad H_{nc}]^T \quad (2.3-9)$$

$$\mathbf{H}_l^B = [H_{kl} \quad H_{k+1,l} \quad \cdots \quad H_{nl}]^T \quad (2.3-10)$$

由式(1.7-44), 在第 i 阶模态频率 $\omega = \omega_{0i}$ 处,

$$\mathbf{H}(\omega_{0i}) = \frac{1}{j\omega_{0i}c_i} \begin{bmatrix} \varphi_{1i}\varphi_{1i} & \varphi_{1i}\varphi_{2i} & \cdots & \varphi_{1i}\varphi_{ni} \\ \varphi_{2i}\varphi_{1i} & \varphi_{2i}\varphi_{2i} & \cdots & \varphi_{2i}\varphi_{ni} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \varphi_{ni}\varphi_{1i} & \varphi_{ni}\varphi_{2i} & \cdots & \varphi_{ni}\varphi_{ni} \end{bmatrix} \quad (4.9-1)$$

近似成立。在固有频率 ω_{0i} 和模态阻尼 c_i 已被识别出后, 上式右端矩阵中任一系列 e 有下述关系:

$$\varphi_{ei}\varphi_i = j\omega_{0i}c_i\mathbf{H}_e \quad (4.9-2)$$

式中 $\varphi_i = [\varphi_{1i} \quad \varphi_{2i} \quad \cdots \quad \varphi_{ni}]^T$ 为振型矢量, φ_{ei} 为 φ_i 中第 e 个元素, \mathbf{H}_e 为 $\mathbf{H}(\omega_{0i})$ 中第 e 列, 为 n 维复向量。

将测得的 $\mathbf{H}(\omega_{0i})$ 中第 c 列前半部分 \mathbf{H}_c^A 代入式(4.9-2), 可求出 φ_i 前半部分 φ_i^A 。其中要首先求 φ_{ci} , 再求 φ_i^A 的其他元素。同理, 可由 \mathbf{H}_l^B 求出 φ_i 的后半部分 φ_i^B , 将 φ_i^A 和 φ_i^B 组合起来, 得第 i 阶振型矢量

$$\varphi_i = \begin{bmatrix} \varphi_i^A \\ \varphi_i^B \end{bmatrix} \quad (4.9-3)$$

为了提高不同区域测量的一致性, 可使用增测的两激励点 c, l 之间的频响函数 H_{cl} 或 H_{lc} 来识别 φ_{ci}^B 。由式(4.9-2), 有

$$\varphi_{li}\varphi_{ci} = j\omega_{0i}c_iH_{cl}$$

当 φ_i^A 求出后, φ_{ci} 已知, 故

$$\varphi_{li} = \frac{j\omega_{0i}c_iH_{cl}}{\varphi_{ci}} \quad (4.9-4)$$

以此为基准, 由 \mathbf{H}_l^B 按式(4.9-2)可求得 φ_i^B 的其他元素。

采用 2.3 节提到的改进的单点分区激励方式, 使每个区激励点位于该区域中部, 能得到信噪比更高的频响函数, 如

$$H(\omega) = \begin{bmatrix} & e & f \\ \begin{array}{c} \vdots \\ \vdots \\ \vdots \end{array} & \begin{array}{c} H_{ae} \\ \vdots \\ H_{ae} \\ \vdots \\ H_{be} \end{array} & H_{ef} \\ p \text{ 区} & & \\ & & \begin{array}{c} H_{b+1,f} \\ \vdots \\ H_{ff} \\ \vdots \\ H_{df} \end{array} \\ & H_{fe} & q \text{ 区} \\ & & \end{bmatrix} \begin{array}{c} a \\ e \\ b \\ b+1 \\ f \\ d \end{array} \quad (4.9-5)$$

使用上述方法可识别出整体各阶模态。

4.9.2 复模态系统

假设系统为粘性阻尼系统,按一定方法识别出第 i 阶模态各区中一个留数列阵(行阵或行、列结合),如

$$R_i = \begin{bmatrix} & e & f \\ \begin{array}{c} \vdots \\ \vdots \\ \vdots \end{array} & \begin{array}{c} R_{ae} \\ \vdots \\ R_{ae} \\ \vdots \\ R_{be} \end{array} & R_{ef} \\ p \text{ 区} & & \\ & & \begin{array}{c} R_{b+1,f} \\ \vdots \\ R_{ff} \\ \vdots \\ R_{df} \end{array} \\ & R_{fe} & q \text{ 区} \\ & & \end{bmatrix} \begin{array}{c} a \\ e \\ b \\ b+1 \\ f \\ d \end{array} \quad (4.9-6)$$

由式(1.6-36),得类似式(4.9-2)的关系式

$$\phi_{ei} \psi_i = a_i R_e \quad (4.9-7)$$

式中 $\psi_i = [\psi_{1i} \quad \psi_{2i} \quad \cdots \quad \psi_{mi}]^T$ 为振型矢量, ϕ_{ei} 为 ψ_i 中第 e 个元素, R_e 为 R_i 中第 e 列, ψ_i 、 R_e 均为 n 维复向量。

设已识别出 p 区和 q 区的留数列阵 $R_e^p = [R_{ae} \cdots R_{ae} \cdots R_{be}]^T$ 和 $R_f^q = [R_{b+1,f} \cdots R_{ff} \cdots R_{df}]^T$, 由式(4.9-7)可得

$$\psi_i^p = \frac{a_i}{\phi_{ei}} R_e^p \quad (4.9-8)$$

$$\psi_i^o = \frac{a_i R_j}{\psi_{ji}} \quad (4.9-9)$$

式中

$$\psi_{ei} = \sqrt{a_i R_{\sigma}} \quad (4.9-10)$$

$$\psi_{fi} = \sqrt{a_i R_{ff}} \text{ 或 } \psi_{fi} = \frac{a_i R_{ef}}{\psi_{ei}} = \frac{a_i R_{fe}}{\psi_{ei}} \quad (4.9-11)$$

将各区识别到的 ψ_i^o 、 ψ_i^o 组合起来,得整体振型列阵

$$\Psi_i = \begin{bmatrix} \vdots \\ \psi_i^o \\ \psi_i^o \\ \vdots \end{bmatrix} \quad (4.9-12)$$

由此看出,分区模态综合法的方法简单,在不增加测试设备的条件下,可得到满意的效果。因此,它对普通测试单位来讲,不失为一种实用、有效的模态分析方法。它的缺点是对超大型结构仍难以激起整体有效模态。

4.10 频域总体识别法

前面介绍的模态参数识别方法均属局部识别法。最早研究总体模态识别法是从时域法开始的,较典型的有多参考点复指数法(PRCE)和特征系统实现算法(ERA)。这两种方法将在第5章介绍。由于时域总体识别法一般包含频域—时域转换误差,自20世纪80年代中期,人们陆续提出一些频域内的总体识别法。频域总体识别法事实上都建立在MIMO频响函数估计基础之上,使用频响函数矩阵的多列元素进行识别。还有一种建立在SIMO频响函数估计之上的不完全的总体识别法,即通常称为SIMO参数识别的方法。这种方法仍然只使用频响函数矩阵的一列元素,但识别模态频率和阻尼时不是使用一个频响函数,而是同时使用多个频响函数,这会提高识别精度。由于仍建立在单点激励基础上,故输入能量有限,且无法识别重根系统。

下面介绍频域总体识别法。

n 个自由度一般粘性阻尼系统位移频响函数模态展式(1.5-60)可以写成矩阵形式,即

$$H(\omega) = [\Psi \quad \Psi^*] \begin{bmatrix} (j\omega I - \Lambda)^{-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & (j\omega I - \Lambda^*)^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \text{diag}\left[\frac{1}{a_i}\right] & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \text{diag}\left[\frac{1}{a_i^*}\right] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\Psi^T \\ \Psi^H \end{bmatrix} \quad (4.10-1)$$

式中 Ψ 、 Λ 分别为系统模态矩阵和谱矩阵, $n \times n$ 阶, I 为 $n \times n$ 阶单位矩阵, $\mathbf{0}$ 为 $n \times n$ 阶 0 矩阵。

速度频响函数矩阵

$$\mathbf{H}_V(\omega) = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\Psi}\mathbf{A} & \boldsymbol{\Psi}^* \mathbf{A}^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (\mathbf{j}\omega\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & (\mathbf{j}\omega\mathbf{I} - \mathbf{A}^*)^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \text{diag}\left[\frac{1}{a_i}\right] & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \text{diag}\left[\frac{1}{a_i^*}\right] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\Psi}^T \\ \boldsymbol{\Psi}^H \end{bmatrix} \quad (4.10-2)$$

式(4.10-1)、式(4.10-2)写在一起,有

$$\begin{bmatrix} \mathbf{H}(\omega) \\ \mathbf{H}_V(\omega) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\Psi} & \boldsymbol{\Psi}^* \\ \boldsymbol{\Psi}\mathbf{A} & \boldsymbol{\Psi}^* \mathbf{A}^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (\mathbf{j}\omega\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & (\mathbf{j}\omega\mathbf{I} - \mathbf{A}^*)^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \text{diag}\left[\frac{1}{a_i}\right] & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \text{diag}\left[\frac{1}{a_i^*}\right] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\Psi}^T \\ \boldsymbol{\Psi}^H \end{bmatrix} \quad (4.10-3)$$

以上式为基础,通过不同方式,可以构造出不同的系统特征矩阵,从而有不同的识别方法。

4.10.1 R. Fillard 和 G. Lallement 的方法

由式(1.5-41), $\|\mathbf{j}\omega\mathbf{I} - \mathbf{A}\|^{-1} \gg \|\mathbf{j}\omega\mathbf{I} - \mathbf{A}^*\|^{-1}$, 故令

$$(\mathbf{j}\omega\mathbf{I} - \mathbf{A}^*)^{-1} = \mathbf{0}$$

则式(4.10-3)变成

$$\begin{bmatrix} \mathbf{H}(\omega) \\ \mathbf{H}_V(\omega) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\Psi} \\ \boldsymbol{\Psi}\mathbf{A} \end{bmatrix} \mathbf{G} \quad (4.10-4)$$

式中

$$\mathbf{G} = (\mathbf{j}\omega\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \text{diag}\left[\frac{1}{a_i}\right] \boldsymbol{\Psi}^T \quad (4.10-5)$$

为 $n \times n$ 阶矩阵。由式(4.10-4),消去 \mathbf{G} ,得

$$\mathbf{H}_V(\omega) = \mathbf{A}\mathbf{H}(\omega) \quad (4.10-6)$$

式中

$$\mathbf{A} = \boldsymbol{\Psi}\mathbf{A}\boldsymbol{\Psi}^{-1} \quad (4.10-7)$$

上式写成标准特征值问题,即

$$\mathbf{A}\boldsymbol{\Psi} = \boldsymbol{\Psi}\mathbf{A} \quad (4.10-8)$$

\mathbf{A} 称为系统特征矩阵。显然,求得 \mathbf{A} ,即可解得特征值矩阵 \mathbf{A} 和特征矢量矩阵 $\boldsymbol{\Psi}$ 。

\mathbf{A} 可由式(4.10-6)求得。设激励点数为 p ,响应点数为 m ,则式(4.10-6)中的频响函数矩阵 $\mathbf{H}_V(\omega)$ 、 $\mathbf{H}(\omega)$ 均为 $m \times p$ 阶, \mathbf{A} 为 $m \times m$ 阶。设在感兴趣频段内采样点数为 s ,采样序号为 k ,则由式(4.10-6)有

$$\mathbf{H}_V(\omega_k) = \mathbf{A}\mathbf{H}(\omega_k) \quad (k=1,2,\dots,s) \quad (4.10-9)$$

组合在一起,写成

$$\mathbf{V} = \mathbf{A}\mathbf{D} \quad (4.10-10)$$

式中

$$\begin{aligned} \mathbf{D} &= \begin{bmatrix} \mathbf{H}(\omega_1) & \mathbf{H}(\omega_2) & \cdots & \mathbf{H}(\omega_s) \end{bmatrix} \\ \mathbf{V} &= \begin{bmatrix} \mathbf{H}_V(\omega_1) & \mathbf{H}_V(\omega_2) & \cdots & \mathbf{H}_V(\omega_s) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (4.10-11)$$

均为 $m \times sp$ 阶复矩阵。则由式(4.10-10)可解得系统特征矩阵

$$\mathbf{A} = \mathbf{V}\mathbf{D}^+ \quad (4.10-12)$$

式中 \mathbf{D}^+ 为 \mathbf{D} 的广义逆, 一般 $sp > m$, 则

$$\mathbf{D}^+ = \mathbf{D}^H (\mathbf{D}\mathbf{D}^H)^{-1} \quad (4.10-13)$$

一般地, 测试信号中包含噪声模态, 容易使 $\mathbf{D}\mathbf{D}^H$ 产生病态。消除方法是不由上式求 \mathbf{D}^+ , 而是对 \mathbf{D} 进行奇异值分解

$$\mathbf{D} = \mathbf{P}\mathbf{\Sigma}\mathbf{Q}^H \quad (4.10-14)$$

式中 \mathbf{P} 为 $m \times m$ 阶酉矩阵, \mathbf{Q} 为 $sp \times sp$ 阶酉矩阵, $\mathbf{\Sigma}$ 为 $m \times sp$ 阶矩阵, 即

$$\mathbf{\Sigma} = \begin{bmatrix} d_1 & & & & \\ & d_2 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & d_N & \\ & & & & 0 \\ \hline & & & & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.10-15)$$

式中 $d_l = \sqrt{\beta_l}$ ($l=1, 2, \dots, N$), N 为矩阵 \mathbf{D} 的秩, d_l 称为 \mathbf{D} 的奇异值。 β_l 为 $\mathbf{D}^H\mathbf{D}$ 非零特征值全体, 且按降序排列。 \mathbf{P} 为 $\mathbf{D}\mathbf{D}^H$ 的特征矢量矩阵, 其列阵称为 \mathbf{D} 的左奇异矢量; \mathbf{Q} 为 $\mathbf{D}^H\mathbf{D}$ 的特征矢量矩阵, 其列称为 \mathbf{D} 的右奇异矢量。

由式(4.10-14), 得 \mathbf{D} 的广义逆

$$\mathbf{D}^+ = \mathbf{Q}\mathbf{\Sigma}^{-1}\mathbf{P}^H \quad (4.10-16)$$

式中

$$\mathbf{\Sigma}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{d_1} & & & & \\ & \frac{1}{d_2} & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & \frac{1}{d_N} & \\ & & & & 0 \\ \hline & & & & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.10-17)$$

为 $sp \times m$ 阶矩阵。

事实上, N 一般为系统的有效模态数, \mathbf{A} 有 N 个非小量特征值。当 $m \gg N$ 时, 可采用所谓的主分解技术, 通过等价变换将 \mathbf{A} 变换为 $N \times N$ 阶矩阵 \mathbf{A}_p , \mathbf{A}_p 称为最小实现系统矩阵。直接求解 \mathbf{A}_p 的特征值问题, 可得系统的有效模态。

4.10.2 李岳锋的方法

上述方法虽然简便, 但由于假定了 $(j\omega\mathbf{I} - \mathbf{A}^*)^{-1} = \mathbf{0}$, 在得到式(4.10-4)时带来截断误差。写出式(4.10-3)的第 r 列

$$\begin{bmatrix} \mathbf{H}^r(\omega) \\ \mathbf{H}_v^r(\omega) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\Psi} & \boldsymbol{\Psi}^* \\ \boldsymbol{\Psi}\mathbf{A} & \boldsymbol{\Psi}^*\mathbf{A}^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (j\omega\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & (j\omega\mathbf{I} - \mathbf{A}^*)^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \text{diag}\left[\frac{1}{a_i}\right] & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \text{diag}\left[\frac{1}{a_i^*}\right] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\Psi}_r \\ \boldsymbol{\Psi}_r^* \end{bmatrix} \quad (4.10-18)$$

式中 ψ_r 、 ψ_r^* 分别为 ψ 、 ψ^* 的第 r 行元素组成的列阵

$$\left. \begin{aligned} \psi_r &= [\psi_{r1} \quad \psi_{r2} \quad \cdots \quad \psi_{rn}]^T \\ \psi_r^* &= [\psi_{r1}^* \quad \psi_{r2}^* \quad \cdots \quad \psi_{rn}^*]^T \end{aligned} \right\} \quad (4.10-19)$$

式(4.10-18)亦可写成

$$\begin{bmatrix} \mathbf{H}^r(\omega) \\ \mathbf{H}_V^r(\omega) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \psi & \psi^* \\ \psi\Lambda & \psi^*\Lambda^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \text{diag}[\psi_n] & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \text{diag}[\psi_n^*] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{c}(\omega) \\ \bar{\mathbf{c}}(\omega) \end{bmatrix} \quad (4.10-20)$$

式中

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{c}(\omega) &= \left[\frac{1}{a_1(j\omega - \lambda_1)} \quad \frac{1}{a_2(j\omega - \lambda_2)} \quad \cdots \quad \frac{1}{a_n(j\omega - \lambda_n)} \right]^T \\ \bar{\mathbf{c}}(\omega) &= \left[\frac{1}{a_1^*(j\omega - \lambda_1^*)} \quad \frac{1}{a_2^*(j\omega - \lambda_2^*)} \quad \cdots \quad \frac{1}{a_n^*(j\omega - \lambda_n^*)} \right]^T \end{aligned} \right\} \quad (4.10-21)$$

同理,式(4.10-3)第 t 列也可写成

$$\begin{bmatrix} \mathbf{H}^t(\omega) \\ \mathbf{H}_V^t(\omega) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \psi & \psi^* \\ \psi\Lambda & \psi^*\Lambda^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \text{diag}[\psi_n] & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \text{diag}[\psi_n^*] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{c}(\omega) \\ \bar{\mathbf{c}}(\omega) \end{bmatrix} \quad (4.10-22)$$

从式(4.10-20)、式(4.10-22)中消去 $\begin{bmatrix} \mathbf{c}(\omega) \\ \bar{\mathbf{c}}(\omega) \end{bmatrix}$, 得

$$\begin{bmatrix} \mathbf{H}^r(\omega) \\ \mathbf{H}_V^r(\omega) \end{bmatrix} = \mathbf{B} \begin{bmatrix} \mathbf{H}^t(\omega) \\ \mathbf{H}_V^t(\omega) \end{bmatrix} \quad (4.10-23)$$

式中

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \psi & \psi^* \\ \psi\Lambda & \psi^*\Lambda^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \text{diag}[\frac{\psi_n}{\psi_n}] & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \text{diag}[\frac{\psi_n^*}{\psi_n^*}] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \psi & \psi^* \\ \psi\Lambda & \psi^*\Lambda^* \end{bmatrix}^{-1} \quad (4.10-24)$$

写成标准特征值形式

$$\mathbf{B} \begin{bmatrix} \psi & \psi^* \\ \psi\Lambda & \psi^*\Lambda^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \psi & \psi^* \\ \psi\Lambda & \psi^*\Lambda^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \text{diag}[\frac{\psi_{ni}}{\psi_{ni}}] & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \text{diag}[\frac{\psi_{ni}^*}{\psi_{ni}^*}] \end{bmatrix} \quad (4.10-25)$$

\mathbf{B} 为系统的另一种特征矩阵。其特征矢量的前半部分即系统特征矢量 ψ_i , 后半部分与前半部分之比即特征值

$$\lambda_i = \frac{\psi_i^H(\psi_i \lambda_i)}{\psi_i^H \psi_i} \quad (4.10-26)$$

系统矩阵 \mathbf{B} 可由式(4.10-23)求出。设激励点数为 p , 响应点数为 m , 采样点数为 s , 采样点号为 $k(k=1, 2, \cdots, s)$, 则由式(4.10-23)在第 k 个频率点处

$$\begin{bmatrix} \mathbf{H}^r(\omega_k) \\ \mathbf{H}_V^r(\omega_k) \end{bmatrix} = \mathbf{B} \begin{bmatrix} \mathbf{H}^t(\omega_k) \\ \mathbf{H}_V^t(\omega_k) \end{bmatrix} \quad (k=1, 2, \cdots, s) \quad (4.10-27)$$

组合起来,写成矩阵形式为

$$\mathbf{R} = \mathbf{B}\mathbf{T} \quad (4.10-28)$$

式中

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{R} &= \begin{bmatrix} \mathbf{H}^r(\omega_1) & \mathbf{H}^r(\omega_2) & \cdots & \mathbf{H}^r(\omega_s) \\ \mathbf{H}_V^r(\omega_1) & \mathbf{H}_V^r(\omega_2) & \cdots & \mathbf{H}_V^r(\omega_s) \end{bmatrix} \\ \mathbf{T} &= \begin{bmatrix} \mathbf{H}^t(\omega_1) & \mathbf{H}^t(\omega_2) & \cdots & \mathbf{H}^t(\omega_s) \\ \mathbf{H}_V^t(\omega_1) & \mathbf{H}_V^t(\omega_2) & \cdots & \mathbf{H}_V^t(\omega_s) \end{bmatrix} \end{aligned} \right\} \quad (4.10-29)$$

均为 $2m \times s$ 阶复矩阵。 \mathbf{B} 为 $2m \times 2m$ 阶复矩阵。

由式(4.10-28),可解得系统矩阵

$$\mathbf{B} = \mathbf{R}\mathbf{T}^+ \quad (4.10-30)$$

\mathbf{T}^+ 为 \mathbf{T} 的广义逆。

讨论如下:

①由式(4.10-24)或式(4.10-25), \mathbf{B} 存在的条件要求 $\psi_n \neq 0$ 。这一条件有时难以满足。

故可用以下二式代替 $\begin{bmatrix} \mathbf{H}^r(\omega) \\ \mathbf{H}_V^r(\omega) \end{bmatrix}$ 和 $\begin{bmatrix} \mathbf{H}^t(\omega) \\ \mathbf{H}_V^t(\omega) \end{bmatrix}$ 。

$$\left. \begin{aligned} \begin{bmatrix} \mathbf{H}^R(\omega) \\ \mathbf{H}_V^R(\omega) \end{bmatrix} &= \sum_{r=1}^p \alpha_r \begin{bmatrix} \mathbf{H}^r(\omega) \\ \mathbf{H}_V^r(\omega) \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} \mathbf{H}^T(\omega) \\ \mathbf{H}_V^T(\omega) \end{bmatrix} &= \sum_{t=1}^p \beta_t \begin{bmatrix} \mathbf{H}^t(\omega) \\ \mathbf{H}_V^t(\omega) \end{bmatrix} \end{aligned} \right\} \quad (4.10-31)$$

式中 $[\alpha_1 \quad \alpha_2 \quad \cdots \quad \alpha_p]^T$ 和 $[\beta_1 \quad \beta_2 \quad \cdots \quad \beta_p]^T$ 为任意二线性无关矢量。 \mathbf{B} 的特征矢量不

变,只不过特征值变为 $\frac{\sum_{r=1}^p \alpha_r \psi_{ri}}{\sum_{t=1}^p \beta_t \psi_{ti}}$, 而 $\sum_{t=1}^p \beta_t \psi_{ti}$ 一般不为 0。

②为剔除噪声模态和提高效率,仍可采用 4.10.1 中的奇异值分解及主分解技术。

4.11 模态矢量的归一化与动画显示

模态矢量或振型矢量中,各元素之间的比值是确定的,只考虑一个元素值的大小并无意义。然而,在由各种方法所得到的模态矢量中,各元素的值可能很大或很小。为了便于表达和比较各元素之间相对值的大小以及在进一步做物理参数修改或识别时便于应用,有必要对模态矢量归一化。另外,静态的振型图形不易观察各点之间的相对位移,现代模态分析系统都以动画显示。

1. 实模态矢量的归一化

归一化的方法很多。对实模态系统,振型归一化常取以下几种方式:

- ①对某个实模态矢量,令矢量中最大元素值为 1,其余元素均被最大元素去除;
- ②令原点频响函数对应的模态矢量元素 $\varphi_{fi} = 1$;
- ③令模态质量 $m_i = 1$ 。

2. 复模态矢量的归一化

对复模态系统,模态矢量为复矢量,常有下列三种方法:

①令模态矢量中模最大的元素为 1,其余元素均被此元素去除;

②令原点频响函数对应的模态矢量元素 $\psi_p = 1$;

③令模态参数 $a_i = 1$ 。

3. 振型的动画显示

现代图形处理技术能使被测结构任一阶振型进行动画显示,各物理坐标点已用直线或拟合曲线连接。常用方式有:

①三维振型动画显示,按物理坐标点求得对应三维空间位移及相角,以某种方式进行三维动画显示;

②二维振型动画显示,按物理坐标点求得二维空间的位移及相角,以某种方式进行二维动画显示;

③一维振型动画显示,只显示某一坐标方向的振型活动情况;

④整体振型动画显示,显示结构整体振型;

⑤局部振型动画显示,只显示部分结构的振型;

⑥活动振型大多以正弦规律显示,亦可以半正弦规律显示;

⑦可以从任意角度观察振型的变化;

⑧为比较结构静态图,可以在振型活动图上叠加未变形的结构图;

⑨屏幕上同时显示多个活动振型。

注意实模态系统的活动振型为驻波,节点(线)位置不变;而复模态系统的活动振型为行波,各节点(线)位置是变化的。

思 考 题

1. 什么是曲线拟合?为什么要进行曲线拟合?最常用的曲线拟合法是什么?
2. 最小二乘法与广义逆矩阵是何关系?与相关函数矩阵或协方差矩阵是何关系?
3. 什么是单模态识别法和多模态识别法?各适于什么样的振动系统?
4. 单模态识别法有哪几种常用方法?
5. 以结构阻尼为例,说明单自由度系统、不考虑剩余模态影响的多自由度系统、考虑剩余模态影响的多自由度系统三种情形中的 Nyquist 图各是什么样子?
6. 多模态识别法的基本思路是什么?常有哪几种方法?
7. 如何处理拟合频段以外模态的影响?
8. 对多自由度实模态系统,用哪种频响特性做参数识别较好?试从拟合频段以外影响的角度解释。
9. 什么叫模态参数的线性项和非线性项?一般如何识别非线性模态参量?
10. 写出非线性加权最小二乘法的一般过程。加权的意义何在?
11. 比较直接偏导数法与非线性加权最小二乘法。
12. Levy 法与直接偏导数法、非线性加权最小二乘法的数学模型有何不同?对非线性项如何处理?
13. 正交多项式拟合法与 Levy 法有何区别?
14. 理论上说,为什么测量一点的响应就可通过多自由度曲线拟合识别出各阶固有频率?
15. 为什么识别模态振型要先识别留数而且需要多点响应?
16. 简述分区模态综合法的基本思想。该方法有何优点?
17. 试述 MIMO 频域总体识别法的基本思想。它与多自由度 SISO 识别法有何本质不同?
18. 模态矢量归一化有哪几种方法?

第 5 章 模态参数识别的时域方法

5.1 引言

本书第 3、4 章详细阐述了模态分析频域法的信号处理技术和参数识别方法。到 20 世纪 80 年代初,频域法的基本原理、技术实现和产品设备已发展得相当成熟,识别效果也相当满意。事实上,目前频域参数识别仍是模态分析的主流方法。频域法最大优点是利用频域平均技术,最大限度地抑制了噪声影响,使模态定阶问题容易解决。然而,该方法也存在若干不足,如功率泄漏、频率混叠、离线分析等。由于对非线性参数需用迭代法识别,因而分析周期长;又由于必须使用激励信号,一般需增加复杂的激振设备。特别是对大型结构,尽管可采用多点激振技术,但有些情况下仍难以实现有效激振,无法测得有效激励和响应信号,比如对大型海工结构、超大建筑物、超大运输工具等,往往只能得到自然力或工作动力激励下的响应信号。

为此,从 20 世纪 70 年代起,陆续有人开始研究只基于响应信号的参数识别技术,其中以 Ibrahim S R 的工作最为著名。1973 年, Ibrahim 提出了一种模态参数识别的时域方法。该方法必须同时使用位移、速度、加速度三种自由响应信号,应用并不方便。1977 年,他对该方法做了重大改进,只要利用位移、速度、加速度三种自由响应信号中的一种,即可识别系统的模态参数,通常称为 ITD 法。ITD 法的特点是,同时使用全部测点的自由响应数据,实际是一种整体模态参数识别方法,成为后来发展起来的多种整体识别法的基础。1986 年, Ibrahim 又提出了省时的 STD 法,使 ITD 法的计算量大为降低。

70 年代末发展起来的另一种时域识别方法是最小二乘复指数法(LSCE 法)。由于该方法使用了 Prony 多项式,所以又称 Prony 法。另外,在上述单参考点复指数法的基础上, Harvard Vold 于 1982 年提出了多参考点复指数法(PRCE 法)。1984 年, NASA 所属的 Langley 研究中心又发展了一种特征系统实现法(ERA)。这两种方法均属 MIMO 整体识别法,比单参考点的 LSCE 法的识别精度有较大提高,特别是能识别密集模态和重根情形,对大型复杂结构效果良好。

另一类时域识别方法是时间序列法。20 世纪 70 年代中期,美籍华人吴贤铭和 Pandit 将时序法成功用于机械制造业,对时序法的数学方法赋予了清晰的物理概念,讨论并阐明了时序模型方程与振动微分方程之间的关系。模态参数识别中的时序法使用的数学模型(差分方程)主要是 AR 模型和 ARMA 模型。AR 模型只使用响应信号, ARMA 模型需使用激励和响应两种信号。二者均使用平稳随机信号。1986 年 Leuridan J M 等人使用 ARMA 模型提出了另一种 MIMO 时域识别法 DPMI(Direct Parameter Model Identification)。该方法将 LSCE、PRCE 及 ITD 法统一起来。

时域参数识别法的主要优点是可以只使用实测响应信号,无需 FFT,因而可以在线分析,使用设备简单。当不使用脉冲响应信号时,缺点也很明显。由于不使用平均技术,因而分析信

号中包含噪声干扰,所识别的模式中除系统模式外,还包含噪声模式。如何甄别和剔除噪声模式,一直是时域法研究中的重要课题。人们已提出若干方法和对策,如采用模式置信因子(MCF)或总体模式置信因子(OAMCF)、模式形状相关系数(MSCC)等判断是否为噪声模式,采用增加测点数给噪声以出口,采用逐步扩阶最小二乘法确定模式有效阶数等方法,都在一定程度上解决了模式定阶问题。

本章拟介绍时域识别的几种典型方法——ITD法、LSCE法、ARMA时序法、PRCE法和ERA法。其中LSCE和ARMA属SISO参数识别,ITD属SIMO参数识别,PRCE、ERA属于MIMO整体参数识别。ITD和LSCE法直接使用自由响应或脉冲响应信号,ARMA时序法使用随机激励和响应信号,PRCE和ERA使用脉冲响应函数矩阵。另外指出,由于对结构阻尼系统无法得到适当的自由振动表达式,故对这些方法的讨论只限于粘性阻尼系统。

由Cole提出的随机减量技术提供了一种从随机响应信号得到自由响应信号的方法,可作为ITD法和LSCE法的前期工作并与之联用。下面首先介绍这一方法。

5.2 随机减量技术

在以自由振动响应为数学模型的时域识别方法中,自由响应信号可以由系统的自由振动直接测得。然而,有些情况下,人们很难直接得到自由响应,如海浪及风激励下的海上钻井平台和钻井船,航行中的轮船,随机风载作用下的高层建筑等,容易得到的是随机响应信号。如果能从这些随机信号中提取出某种自由响应信号,无疑会大大增加一些时域识别方法的应用范围。随机减量技术提供了解决这一问题的方法。

如果随机响应信号是均值为零的平稳随机过程,通过一定限制条件下的取样本和采样,再通过时域平均,可提取出相当于某种初始条件下的自由响应信号。事实上,对均值不为零的平稳随机信号,可通过消去均值的办法转换为均值为零的随机信号,这一方法仍然适用。Ibrahim曾对这一方法进行了详细研究,指出在很广的范围内,这一方法是有效的。他还结合ITD法研究了空间飞行器的模式参数识别,获得良好效果。

下面首先通过单自由度振动系统介绍随机减量技术的基本原理和实现方法。

5.2.1 单自由度系统的随机减量技术

1. 基本原理

设一具有粘性阻尼的单自由度振动系统在零均值的平稳随机激励 $f(t)$ 作用下运动。设初始位移为 $x(0)$,初始速度为 $\dot{x}(0)$,则位移响应为

$$x(t) = x(0)D(t) + \dot{x}(0)v(t) + \int_0^t h(t-\tau)f(\tau)d\tau \quad (5.2-1)$$

式中 $D(t)$ 为仅在初始条件 $x(0)=1, \dot{x}(0)=0$ 作用下系统的自由位移响应; $v(t)$ 为仅在初始条件 $x(0)=0, \dot{x}(0)=1$ 作用下系统的自由位移响应; $h(t)$ 为系统的单位脉冲响应函数。

从式(5.2-1)看出,在初始条件和随机激励作用下的振动响应分为三部分。其中前两部分是确定性的,后一部分是随机性的。现在假设获得了多个样本 $x(t)$,并且保留一项确定性响应不变,如只保留固定的 $x(0)=A$, $f(t)$ 为随机过程且均值为零,如 $\dot{x}(0)$ 的均值也为零,即

$$x(0) = A, E[\dot{x}(0)] = 0, E[f(t)] = 0 \quad (5.2-2)$$

对式(5.2-1)取数学期望,后两项均为零,则

$$E[x(t)] = AD(t) \quad (5.2-3)$$

于是得到系统的自由响应信号,称为特征信号。其含义为,系统仅在初始条件 $x(0) = A$ 作用下的自由振动响应。

现在的问题是,如何从一个足够长的随机信号中获得足够多的、满足条件式(5.2-2)的样本函数。

2. 实现方法

设已获得单自由度系统平稳随机位移响应的时间历程 $x(t)$, 均值为零, 如图 5.2-1(a) 所示。取一固定值 A , 作直线 $x = A$ 与 $x(t)$ 交于 s 个点 t_k , $x(t_k) = A$ ($k = 1, 2, \dots, s$), 并设 s 为偶数。从每个 t_k 点开始, 截取长度为 T 的样本 $x(t - t_k)$, 样本长度 T 应足够长。于是由式(5.2-1)有

$$x(t - t_k) = x(t_k)D(t - t_k) + \dot{x}(t_k)v(t - t_k) + \int_{t_k}^t h(t - \tau)f(\tau)d\tau \quad (5.2-4)$$

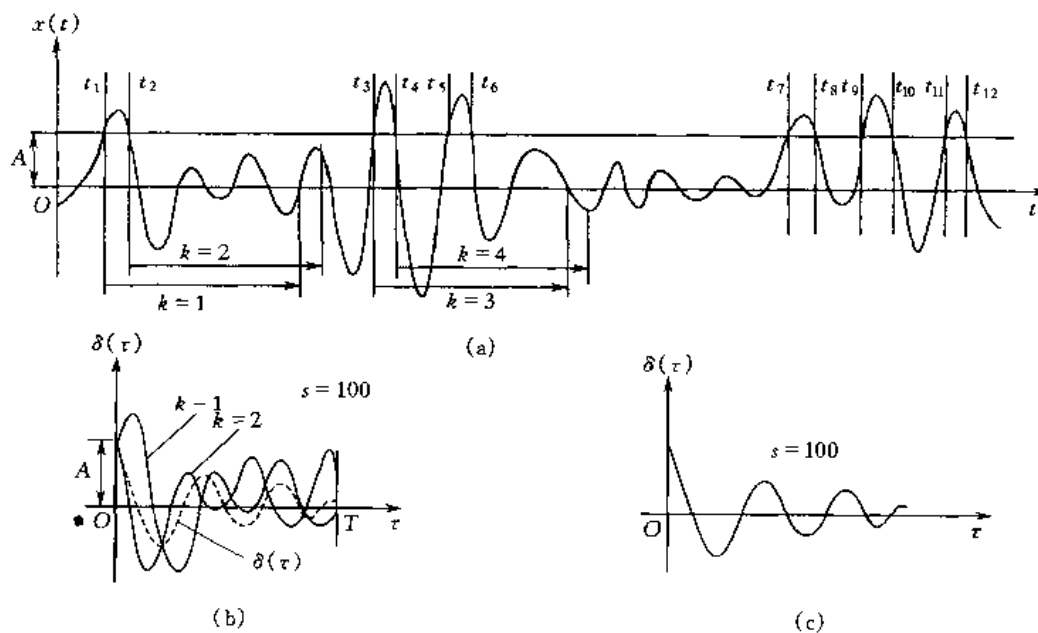


图 5.2-1 单自由度系统的随机减量技术

(a) 随机位移响应信号; (b) 将各样本函数移至同一原点坐标系; (c) 平均后获得的自由响应特征信号

考察这 s 个样本 $x(t - t_k)$, 当 k 为奇数和偶数时 $\dot{x}(t_k)$ 近似相等但符号相反, 因此一组样本 $x(t - t_k)$ ($k = 1, 2, \dots, s$) 满足条件(5.2-2), 即

$$x(t_k) = A, E[\dot{x}(t_k)] = 0, E[f(t)] = 0 \quad (5.2-5)$$

当 s 足够大时, 对式(5.2-4)取平均近似为数学期望, 考虑式(5.2-5), 得

$$E[x(t - t_k)] = AD(t - t_k) \quad (5.2-6)$$

令 $\tau = t - t_k$, 相当于平移坐标轴或变换时间尺度(注意 τ 为变换时间坐标, 不是 Duhamel 积分中的积分变量), 如图 5.2-1(b)所示, 得

$$E[x(\tau)] = AD(\tau) \quad (5.2-7)$$

即为从一个随机信号 $x(t)$ 中提取出的长度为 T 的自由振动响应,如图 5.2-1(c)所示。令

$$\delta(\tau) = \frac{1}{s} \sum_{k=1}^s x(\tau + t_k) \quad (5.2-8)$$

$\delta(\tau)$ 为式(5.2-6)的近似值,称为随机减量特征信号。当 $s \rightarrow \infty$ 时, $\delta(\tau) = E[x(\tau)]$ 。

讨论如下:

①随机减量技术的实现过程仍是建立在离散数字信号基础上的,包括取样本和平均。因此,首先应对随机信号 $x(t)$ 采样,采样应满足采样定理,即采样频率应大于等于所得特征信号 $\delta(\tau)$ 中最高频率成分的两倍,以保证用特征信号能识别出关心的结构最高频率。

②所设条件式(5.2-5)中取样本时触发条件 $x(t_k) = A$,在实际操作时应取一小的范围

$$A_1 \leq x(t_k) \leq A_2 \quad (5.2-9)$$

式中 $A_1 \leq A \leq A_2$ 且 $A - A_1, A_2 - A$ 很小但均略大于 A 的量化误差,此时 $E[x(t_k)] = \bar{A} \approx A$ 。于是,式(5.2-7)成为

$$E[x(\tau)] = \bar{A} D(\tau) \quad (5.2-10)$$

③每个样本 $x(t - t_k)$ 的长度 T 应足够大,以能包含特征信号 $\delta(\tau)$ 的全部频率信息。如 T 取 $\delta(\tau)$ 中最低模态频率对应周期的三倍以上。

④平均次数 s 越大越好,一般取 $s = 500 \sim 1000$ 。

⑤取样本触发条件不一定用式(5.2-5),还可取

$$x(t_k) = 0, \dot{x}(t_k) > 0 \quad (\text{或 } \dot{x}(t_k) < 0) \quad (5.2-11)$$

⑥不仅可对位移随机信号应用随机减量技术,对速度和加速度随机信号仍可应用上述方法提取速度或加速度自由响应信号。

5.2.2 多自由度系统的随机减量技术

多自由度系统同时获得多个测点的随机响应信号后,亦可应用随机减量技术获得各测点的自由振动响应。其基本思想是,任选一测点为基准点,对该点随机响应可获得某一初始条件下的自由响应,同时,设法获得在基准点初始条件作用下其他点的自由响应。这样,获得各测点的自由响应是相关的,具有相同的初始条件。

设已获得 n 个测点的随机位移响应信号 $x_e(t)$ ($e = 1, 2, \dots, n$),不妨取第 1 个测点为基准点,对该测点随机响应 $x_1(t)$ 应用随机减量技术,仍设取样本条件为式(5.2-5),得随机减量特征信号

$$\delta_1(\tau) = \frac{1}{s} \sum_{k=1}^s x_1(\tau + t_k) \quad (5.2-12)$$

对其他测点的随机响应信号 $x_e(t)$ ($e = 2, 3, \dots, n$),按照基准点 1 信号的取样本位置截取相同长度的样本 $x_e(t - t_k)$ ($k = 1, 2, \dots, s$),如图 5.2-2 所示,则

$$x_e(t - t_k) = x_1(t_k) D_{e1}(t - t_k) + x_e(t_k) D_e(t - t_k) + \dot{x}_e(t_k) v_e(t - t_k) + \int_{t_k}^t h_e(t - \tau) f(\tau) d\tau \quad (k = 1, 2, \dots, s) \quad (5.2-13)$$

式中, $x_1(t_k)$ 表示基准点在 t_k 时刻的幅值; $D_{e1}(t - t_k)$ 表示在基准点 1 仅作用单位初始位移引起第 e 点的自由位移响应; $x_e(t_k)$ 表示第 e 点在 t_k 时刻的幅值; $D_e(t - t_k)$ 表示在 e 点仅作用单位初始位移引起该点的自由位移响应; $\dot{x}_e(t_k)$ 表示第 e 测点在 t_k 时刻的速度; $v_e(t - t_k)$

表示在第 e 点仅作用单位初始速度引起的该点自由位移响应; $h_e(t)$ 表示由单位脉冲激励(与 $f(t)$ 在同一点)引起的脉冲响应函数。上式中除第一项外其他项均具有随机性质, 且均值为零。对该式取平均得

$$\delta_e(\tau) = \frac{1}{S} \sum_{k=1}^S x_e(t + t_k) = A_1 D_{e1}(\tau) \quad (e=2, 3, \dots, n) \quad (5.2-14)$$

式中, $A_1 = E[x_1(t_k)]$ 。

上述分析表明, 只要同时获得各测点随机响应信号 $x_e(t)$ ($e=1, 2, \dots, n$), 任取其中一个测点为基准点, 按触发条件式(5.2-5)或式(5.2-11)取样本, 并对其他测点取相同时刻和相同长度的等量样本, 对各组样本做时域平均, 即得到在基准点初始条件下所有测点的自由响应信号即特征信号。

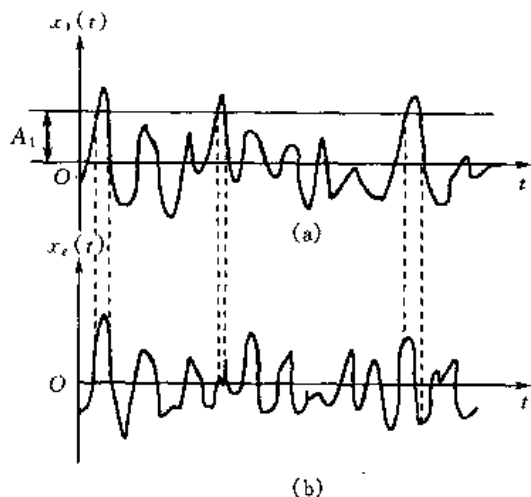


图 5.2-2 多自由度系统的随机减量技术
(a)第 1 个测点信号; (b)第 e 个测点信号

5.3 ITD 方法

ITD 法的基本思想是, 使用同时测得各测点的自由响应(位移、速度、加速度三者之一), 通过三次不同延时的采样, 构造自由响应采样数据的

增广矩阵, 根据自由响应的数学模型建立特征方程, 求解出特征对后再估算各阶模态参数。ITD 法属于整体识别法。

5.3.1 数学模型

n 个自由度粘性阻尼系统的自由位移响应为

$$\mathbf{x}(t) = \sum_{i=1}^n [\boldsymbol{\psi}_i y_i(0) e^{\lambda_i t} + \boldsymbol{\psi}_i^* y_i^*(0) e^{\lambda_i^* t}] \quad (1.5-47)$$

或简写为:

$$\mathbf{x}(t) = \sum_{i=1}^{2n} \mathbf{p}_i e^{\lambda_i t} = \sum_{i=1}^{2n} \mathbf{p}_i e_i(t) \quad (5.3-1)$$

式中, $\mathbf{x}(t)$ 为 n 阶列阵; $e_i(t)$ 为

$$e_i(t) = e^{\lambda_i t} \quad (5.3-2)$$

当 $i=1, 2, \dots, n$ 时

$$\mathbf{p}_i = \boldsymbol{\psi}_i y_i(0) \quad (5.3-3)$$

$$\lambda_i = -\sigma_{mi} + j\omega_{mdi} \quad (5.3-4)$$

当 $i=n+1, n+2, \dots, 2n$ 时, \mathbf{p}_i, λ_i 为上二式的共轭, \mathbf{p}_i 为 n 阶列阵。由式(5.3-3)可见, \mathbf{p}_i 与模态矢量 $\boldsymbol{\psi}_i$ 只差一常数因子 $y_i(0)$ 。因此, 可以用自由响应各阶模态振动的幅值 \mathbf{p}_i 代替模态矢量 $\boldsymbol{\psi}_i$ 。

将式(5.3-1)写成矩阵形式

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{P} \mathbf{e}(t) \quad (5.3-5)$$

式中

$$\mathbf{P} = [\mathbf{p}_1 \quad \mathbf{p}_2 \quad \cdots \quad \mathbf{p}_{2n}] = [\mathbf{p}_1 \quad \mathbf{p}_2 \quad \cdots \quad \mathbf{p}_n \quad \mathbf{p}_1^* \quad \mathbf{p}_2^* \quad \cdots \quad \mathbf{p}_n^*] \quad (5.3-6)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{e}(t) &= [e_1(t) \quad e_2(t) \quad \cdots \quad e_{2n}(t)]^T \\ &= [e^{\lambda_1 t} \quad e^{\lambda_2 t} \quad \cdots \quad e^{\lambda_n t} \quad e^{\lambda_1^* t} \quad e^{\lambda_2^* t} \quad \cdots \quad e^{\lambda_n^* t}]^T \end{aligned} \quad (5.3-7)$$

\mathbf{P} 为 $n \times 2n$ 阶矩阵,且各列线性无关; $\mathbf{e}(t)$ 为 $2n$ 阶列阵。式(5.3-5)即为 ITD 法的数学模型。 \mathbf{P} 的前 n 列和 $\mathbf{e}(t)$ 的前 n 个元素中包含待识别的模态参数。

5.3.2 参数识别

1. 自由响应的数据矩阵

设获得 M 个测点的自由响应时间历程 $\tilde{x}_e(t)$ ($e=1,2,\cdots,M$)。下面按三种形式对其进行采样。

(1) 正常采样

以一定采样时间间隔 Δt 对 $\tilde{x}_e(t)$ 进行等间隔采样,得 $\tilde{x}_e(t_k)$ ($e=1,2,\cdots,M$),采样点号 $k=1,2,\cdots,s$ 。设 $s=2n$,于是得正常采样自由响应数据矩阵

$$\tilde{\mathbf{X}} = \begin{bmatrix} \tilde{x}_1(t_1) & \tilde{x}_1(t_2) & \cdots & \tilde{x}_1(t_{2n}) \\ \tilde{x}_2(t_1) & \tilde{x}_2(t_2) & \cdots & \tilde{x}_2(t_{2n}) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \tilde{x}_M(t_1) & \tilde{x}_M(t_2) & \cdots & \tilde{x}_M(t_{2n}) \end{bmatrix} \quad (5.3-8)$$

$\tilde{\mathbf{X}}$ 为 $M \times 2n$ 阶矩阵。

由式(5.3-5),对应相同采样时间点 t_k 的自由响应理论值为

$$\mathbf{x}(t_k) = \mathbf{P}\mathbf{e}(t_k) \quad (k=1,2,\cdots,2n) \quad (5.3-9)$$

写成矩阵形式

$$\mathbf{X} = \mathbf{P}\mathbf{E} \quad (5.3-10)$$

式中

$$\mathbf{X} = [\mathbf{x}(t_1) \quad \mathbf{x}(t_2) \quad \cdots \quad \mathbf{x}(t_{2n})] \quad (5.3-11)$$

$$\mathbf{E} = [\mathbf{e}(t_1) \quad \mathbf{e}(t_2) \quad \cdots \quad \mathbf{e}(t_{2n})] \quad (5.3-12)$$

\mathbf{X} 为 $n \times 2n$ 阶矩阵, \mathbf{E} 为 $2n \times 2n$ 阶矩阵。

(2) 延时 $\Delta\tau$ 采样

以相同采样时间间隔 Δt 对 $\tilde{x}_e(t)$ 进行延时 $\Delta\tau$ 采样,得 $\tilde{x}_e(t_k + \Delta\tau) = \tilde{y}_e(t_k)$ ($e=1,2,\cdots,M$; $k=1,2,\cdots,s$,且 $s=2n$),延时 $\Delta\tau$ 为采样时间间隔 Δt 的整数倍。于是,得延时 $\Delta\tau$ 采样的自由响应数据矩阵

$$\tilde{\mathbf{Y}} = \begin{bmatrix} \tilde{y}_1(t_1) & \tilde{y}_1(t_2) & \cdots & \tilde{y}_1(t_{2n}) \\ \tilde{y}_2(t_1) & \tilde{y}_2(t_2) & \cdots & \tilde{y}_2(t_{2n}) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \tilde{y}_M(t_1) & \tilde{y}_M(t_2) & \cdots & \tilde{y}_M(t_{2n}) \end{bmatrix} \quad (5.3-13)$$

$\tilde{\mathbf{Y}}$ 为 $M \times 2n$ 阶矩阵。

由式(5.3-5),对应相同采样时间点 $t_k + \Delta\tau$ 的自由响应理论值为

$$\mathbf{x}(t_k + \Delta\tau) = \mathbf{P}\mathbf{e}(t_k + \Delta\tau) \quad (5.3-14)$$

令 $\mathbf{x}(t_k + \Delta\tau) = \mathbf{y}(t_k)$, 又知

$$\mathbf{e}(t_k + \Delta\tau) = \text{diag}[e^{\lambda_i \Delta\tau}] \mathbf{e}(t_k) \approx \mathbf{\Delta}\mathbf{e}(t_k)$$

则式(5.3-14)成为

$$\mathbf{y}(t_k) = \mathbf{P}\mathbf{\Delta}\mathbf{e}(t_k)$$

或写成

$$\mathbf{y}(t_k) = \mathbf{Q}\mathbf{e}(t_k) \quad (k=1, 2, \dots, 2n) \quad (5.3-15)$$

式中

$$\mathbf{Q} = \mathbf{P}\mathbf{\Delta} \quad (5.3-16)$$

$$\mathbf{\Delta} = \text{diag}[e^{\lambda_i \Delta\tau}] \quad (5.3-17)$$

\mathbf{Q} 为 $n \times 2n$ 阶矩阵, $\mathbf{\Delta}$ 为 $2n \times 2n$ 阶对角阵。

将式(5.3-15)写成矩阵形式

$$\mathbf{Y} = \mathbf{Q}\mathbf{E} \quad (5.3-18)$$

式中

$$\mathbf{Y} = [\mathbf{y}(t_1) \quad \mathbf{y}(t_2) \quad \dots \quad \mathbf{y}(t_{2n})] \quad (5.3-19)$$

\mathbf{Y} 为 $n \times 2n$ 阶矩阵。

(3) 延时 $2\Delta\tau$ 采样

以相同采样时间间隔 Δt 对 $\hat{x}_e(t)$ 进行延时 $2\Delta\tau$ 采样, 得 $\hat{x}_e(t_k + 2\Delta\tau) = \tilde{z}_e(t_k) (e=1, 2, \dots, M; k=1, 2, \dots, s, \text{ 且 } s=2n)$, 于是得延时 $2\Delta\tau$ 采样的自由响应数据矩阵

$$\tilde{\mathbf{Z}} = \begin{bmatrix} \tilde{z}_1(t_1) & \tilde{z}_1(t_2) & \dots & \tilde{z}_1(t_{2n}) \\ \tilde{z}_2(t_1) & \tilde{z}_2(t_2) & \dots & \tilde{z}_2(t_{2n}) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \tilde{z}_M(t_1) & \tilde{z}_M(t_2) & \dots & \tilde{z}_M(t_{2n}) \end{bmatrix} \quad (5.3-20)$$

$\tilde{\mathbf{Z}}$ 为 $M \times 2n$ 阶矩阵。

由式(5.3-5), 按照上面的处理方法可得对应采样点理论值

$$\mathbf{Z} = \mathbf{R}\mathbf{E} \quad (5.3-21)$$

式中

$$\begin{aligned} \mathbf{Z} &= [\mathbf{z}(t_1) \quad \mathbf{z}(t_2) \quad \dots \quad \mathbf{z}(t_{2n})] \\ &= [\mathbf{x}(t_1 + 2\Delta\tau) \quad \mathbf{x}(t_2 + 2\Delta\tau) \quad \dots \quad \mathbf{x}(t_{2n} + 2\Delta\tau)] \end{aligned} \quad (5.3-22)$$

$$\mathbf{R} = \mathbf{Q}\mathbf{\Delta} \quad (5.3-23)$$

\mathbf{Z} 、 \mathbf{R} 均为 $n \times 2n$ 阶矩阵。

2. 构造自由响应的增广数据矩阵

(1) 由正常采样和延时 $\Delta\tau$ 采样数据矩阵构造增广矩阵

由实测数据矩阵 $\tilde{\mathbf{X}}$ 和 $\tilde{\mathbf{Y}}$ 构造增广矩阵

$$\tilde{\mathbf{D}}_{xy} = \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{X}} \\ \tilde{\mathbf{Y}} \end{bmatrix} \quad (5.3-24)$$

$\tilde{\mathbf{D}}_{xy}$ 为 $2M \times 2n$ 阶矩阵。

由式(5.3-10)、式(5.3-18),对应理论值的增广矩阵

$$\mathbf{D}_{xy} = \begin{bmatrix} \mathbf{X} \\ \mathbf{Y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{P} \\ \mathbf{Q} \end{bmatrix} \mathbf{E} \quad (5.3-25)$$

\mathbf{D}_{xy} 为 $2n \times 2n$ 阶矩阵。上式可写成

$$\mathbf{D}_{xy} = \boldsymbol{\psi}_{xy} \mathbf{E} \quad (5.3-26)$$

式中

$$\boldsymbol{\psi}_{xy} = \begin{bmatrix} \mathbf{P} \\ \mathbf{Q} \end{bmatrix} \quad (5.3-27)$$

为 $2n \times 2n$ 阶矩阵。 $\boldsymbol{\psi}_{xy}$ 中包含各阶模态矢量。

(2)由延时 $\Delta\tau$ 采样和延时 $2\Delta\tau$ 采样数据矩阵构造增广矩阵

由实测数据矩阵 $\tilde{\mathbf{Y}}$ 和 $\tilde{\mathbf{Z}}$ 构造增广矩阵

$$\tilde{\mathbf{D}}_{yx} = \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{Y}} \\ \tilde{\mathbf{Z}} \end{bmatrix} \quad (5.3-28)$$

$\tilde{\mathbf{D}}_{yx}$ 为 $2M \times 2n$ 阶矩阵。

由式(5.3-18)、式(5.3-21),对应理论值的增广矩阵

$$\mathbf{D}_{yx} = \begin{bmatrix} \mathbf{Y} \\ \mathbf{Z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{Q} \\ \mathbf{R} \end{bmatrix} \mathbf{E} \quad (5.3-29)$$

\mathbf{D}_{yx} 为 $2n \times 2n$ 阶矩阵。上式可写成

$$\mathbf{D}_{yx} = \boldsymbol{\psi}_{yx} \mathbf{E} \quad (5.3-30)$$

式中

$$\boldsymbol{\psi}_{yx} = \begin{bmatrix} \mathbf{Q} \\ \mathbf{R} \end{bmatrix} \quad (5.3-31)$$

为 $2n \times 2n$ 阶矩阵。将式(5.3-16)、式(5.3-23)代入上式,并注意式(5.3-27)得

$$\boldsymbol{\psi}_{yx} = \boldsymbol{\psi}_{xy} \mathbf{A} \quad (5.3-32)$$

3. 构造系统特征方程

当系统无重特征根时, $\boldsymbol{\psi}_{xy}$ 、 $\boldsymbol{\psi}_{yx}$ 均为非奇异矩阵,考虑 \mathbf{D}_{xy} 、 \mathbf{D}_{yx} 亦非奇异,由式(5.3-26)、式(5.3-30)消去 \mathbf{E} ,整理得

$$\boldsymbol{\psi}_{yx} = \mathbf{D}_{yx} \mathbf{D}_{xy}^{-1} \boldsymbol{\psi}_{xy} \quad (5.3-33)$$

考虑式(5.3-32),并令

$$\mathbf{A} = \mathbf{D}_{yx} \mathbf{D}_{xy}^{-1} \quad (5.3-34)$$

\mathbf{A} 为 $2n \times 2n$ 阶矩阵,则式(5.3-33)成为

$$\boldsymbol{\psi}_{xy} \mathbf{A} = \mathbf{A} \boldsymbol{\psi}_{xy} \quad (5.3-35)$$

该式为矩阵 \mathbf{A} 的标准特征值问题。 \mathbf{A} 称为特征矩阵。

设测点数 M 与系统自由度数 n 相等,即 $M = n$,则式(5.3-24)、式(5.3-28)中的 $\tilde{\mathbf{D}}_{xy}$ 、 $\tilde{\mathbf{D}}_{yx}$ 均为 $2n \times 2n$ 阶矩阵,且非奇异。由式(5.3-34)得实测数据的特征矩阵

$$\tilde{\mathbf{A}} = \tilde{\mathbf{D}}_{yx} \tilde{\mathbf{D}}_{xy}^{-1} \quad (5.3-36)$$

代入式(5.3-35),得系统的特征方程

$$\boldsymbol{\psi}_{xy}\boldsymbol{\Delta} = \widetilde{\mathbf{A}}\boldsymbol{\psi}_{xy} \quad (5.3-37)$$

上式按列展开,可写成

$$\boldsymbol{\psi}_{xy}\Delta_i = \widetilde{\mathbf{A}}\boldsymbol{\psi}_{xy}$$

或

$$(\widetilde{\mathbf{A}} - \Delta_i \mathbf{I})\boldsymbol{\psi}_{xy} = \mathbf{0} \quad (i=1,2,\cdots,2n) \quad (5.3-38)$$

可解得特征值 Δ_i 和特征向量 $\boldsymbol{\psi}_{xy}$ ($i=1,2,\cdots,2n$),其中前 n 个特征对与后 n 个特征对为共轭关系。 Δ_i 为 $\boldsymbol{\Delta}$ 的第 i 个对角元素, $\boldsymbol{\psi}_{xy}$ 为 $\boldsymbol{\psi}_{xy}$ 的第 i 列元素组成的列阵, $2n$ 阶。

5.3.3 估算模态参数

求得特征值 Δ_i 和特征向量 $\boldsymbol{\psi}_{xy}$ 后,可进一步估算模态参数。

1. 复模态矢量 \mathbf{p}_i

由式(5.3-27), $\boldsymbol{\psi}_{xy}$ 的第 i 列元素

$$\boldsymbol{\psi}_{xy} = \begin{bmatrix} p_i \\ q_i \end{bmatrix} \quad (i=1,2,\cdots,2n) \quad (5.3-39)$$

对 $i=1,2,\cdots,n$,取 $\boldsymbol{\psi}_{xy}$ 的前 n 个元素组成的列阵即复模态矢量 \mathbf{p}_i 。

2. 复模态频率 ω_{mi} 和复模态阻尼比 ζ_{mi}

由式(5.3-17),第 i 个对角元素

$$\Delta_i = e^{\lambda_i \Delta \tau} \quad (i=1,2,\cdots,2n) \quad (5.3-40)$$

其中前 n 个和后 n 个共轭,故只取前 n 个 Δ_i 即可求得 ω_{mi} 和 ζ_{mi} 。将式(5.3-4)代入上式,展开得 Δ_i 的实部和虚部

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{Re}\Delta_i &= e^{-\sigma_{mi} \Delta \tau} \cos(\omega_{mdi} \Delta \tau) \\ \operatorname{Im}\Delta_i &= e^{-\sigma_{mi} \Delta \tau} \sin(\omega_{mdi} \Delta \tau) \end{aligned} \right\} \quad (i=1,2,\cdots,n) \quad (5.3-41)$$

由此解得

$$\omega_{mdi} = \frac{1}{\Delta \tau} \left(\arctan \frac{\operatorname{Im}\Delta_i}{\operatorname{Re}\Delta_i} + b\pi \right) \quad (b=0,1,2,\cdots) \quad (5.3-42)$$

$$\sigma_{mi} = -\frac{1}{2\Delta \tau} \ln(\operatorname{Re}^2 \Delta_i + \operatorname{Im}^2 \Delta_i) \quad (i=1,2,\cdots,n) \quad (5.3-43)$$

于是得系统各阶模态的复模态频率 ω_{mi} 和复模态阻尼比 ζ_{mi} ,即

$$\omega_{mi} = \sqrt{\omega_{mdi}^2 + \sigma_{mi}^2}, \zeta_{mi} = \frac{\sigma_{mi}}{\omega_{mi}} \quad (5.3-44)$$

3. 估算复模态频率的无量纲算法

式(5.3-42)给出的 ω_{mdi} 是一个多值函数。对每一阶模态,如何确定惟一而准确的 ω_{mdi} ,许多文献给予了讨论,但都未能很好解决。为此,本书提出了估算复模态频率的无量纲算法。

设识别的最大复模态频率为 ω_{\max} ,采样圆频率 $\omega_s = 2\omega_{\max}$,以 ω_s 为特征频率对 λ_i 无量纲化,得无量纲复频率

$$\bar{\lambda}_i = \frac{\lambda_i}{\omega_s} = -\frac{\sigma_{mi}}{\omega_s} + j \frac{\omega_{mdi}}{\omega_s} = -\bar{\sigma}_{mi} + j\bar{\omega}_{mdi} \quad (5.3-45)$$

式中无量纲阻尼 $\bar{\sigma}_{mi}$ 和无量纲频率 $\bar{\omega}_{mdi}$ 为

$$\bar{\sigma}_{mi} = \frac{\sigma_{mi}}{\omega_s}, \bar{\omega}_{mdi} = \frac{\omega_{mdi}}{\omega_s} \quad (5.3-46)$$

将式(5.3-40)两端给以 $\frac{2\pi}{\Delta\tau\omega_s}$ 次方,得

$$\bar{\Delta}_i = e^{2\pi\bar{\lambda}_i} \quad (i=1,2,\cdots,n) \quad (5.3-47)$$

式中

$$\bar{\Delta}_i = (\Delta_i)^{2\pi/\Delta\tau\omega_s} \quad (5.3-48)$$

将式(5.3-47)的实、虚部分开,得

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{Re} \bar{\Delta}_i &= e^{-2\pi\bar{\sigma}_{mi}} \cos 2\pi\bar{\omega}_{mdi} \\ \operatorname{Im} \bar{\Delta}_i &= e^{-2\pi\bar{\sigma}_{mi}} \sin 2\pi\bar{\omega}_{mdi} \end{aligned} \right\} \quad (5.3-49)$$

由此解得

$$\bar{\omega}_{mdi} = \frac{1}{2\pi} \operatorname{arccot} \frac{\operatorname{Re} \bar{\Delta}_i}{\operatorname{Im} \bar{\Delta}_i} \quad (5.3-50)$$

$$\bar{\sigma}_{mi} = -\frac{1}{4\pi} \ln(\operatorname{Re}^2 \bar{\Delta}_i + \operatorname{Im}^2 \bar{\Delta}_i) \quad (5.3-51)$$

式(5.3-50)中反余切函数取主值范围 $(0, \pi)$ 。由式(5.3-46)可求得

$$\omega_{mdi} = \bar{\omega}_{mdi} \omega_s = \frac{\omega_s}{2\pi} \operatorname{arccot} \frac{\operatorname{Re} \bar{\Delta}_i}{\operatorname{Im} \bar{\Delta}_i} \quad (5.3-52)$$

$$\sigma_{mi} = \bar{\sigma}_{mi} \omega_s = -\frac{\omega_s}{4\pi} \ln(\operatorname{Re}^2 \bar{\Delta}_i + \operatorname{Im}^2 \bar{\Delta}_i) \quad (5.3-53)$$

进一步由式(5.3-44)可求得 ω_{mi} 和 ζ_{mi} 。

下面证明由式(5.3-52)确定的 ω_{mdi} 是惟一的。将 $\omega_s = 2\omega_{\max} \operatorname{arccot} \frac{\operatorname{Re} \bar{\Delta}_i}{\operatorname{Im} \bar{\Delta}_i} \in (0, \pi)$ 代入式(5.3-52),得

$$\omega_{mdi} \in (0, \omega_{\max}) \quad (5.3-54)$$

因此,在 $\operatorname{arccot} \frac{\operatorname{Re} \bar{\Delta}_i}{\operatorname{Im} \bar{\Delta}_i}$ 的主值范围内,由式(5.3-52)可惟一确定 ω_{mdi} 。

事实上,若采样频率 f_s 满足采样定理

$$f_s \geq 2f_{\max} \text{ 或 } \omega_s \geq 2\omega_{\max}$$

由上无量纲算法估算出的 ω_{mdi} 满足

$$\omega_{mdi} \in \left(0, \frac{\omega_s}{2}\right) \supset (0, \omega_{\max}) \quad (5.3-55)$$

故 ω_{mdi} 仍是惟一的。

4. 复模态频率和复模态阻尼的另外估算方法

除了由特征值问题式(5.3-38)求特征值 Δ_i 外,亦可由特征矢量 ψ_{xi} 求 Δ_i 。为了区别,记为 Δ'_i 。

由式(5.3-39)及式(5.3-16)可知

$$\mathbf{q}_i = \mathbf{p}_i \Delta'_i$$

两边左乘 \mathbf{p}_i^H , 解得

$$\Delta'_i = \frac{\mathbf{p}_i^H \mathbf{q}_i}{\mathbf{p}_i^H \mathbf{p}_i} = e^{j\lambda_i \Delta\tau} \quad (i=1, 2, \dots, n) \quad (5.3-56)$$

利用上面介绍的无量纲算法, 可估算出 $\omega_{m\Delta\tau}$ 、 σ_{mi} 、 ω_{ni} 、 ζ_{mi} , 只需在式(5.3-52)、式(5.3-53)中将 Δ_i 换作 Δ'_i 即可。这种方法估算出的 σ_{mi} 精度较高。

5.3.4 虚拟测点技术

在前面介绍的 ITD 方法中, 曾假定测点数 M 等于系统自由度数 n , 即 $M=n$ 。但在一般测试中, 系统的自由度数 n 较高, 测点数往往达不到自由度数, 即 $M < n$, 有时还会小很多。在实际测点数无法达到系统自由度数, 的情况下, 可通过延时采样补充虚拟测点, 方法如下。

以相同时间间隔 Δt 对实测信号 $\tilde{x}_e(t)$ 进行延时 $\Delta\tau'$ 采样, 得 $\tilde{x}_e(t_k + \Delta\tau') = \tilde{x}'_e(t_k)$, $\Delta\tau'$ 为 Δt 的整数倍, 且 $\Delta\tau' \neq \Delta\tau$, 以保证新的 $\tilde{\mathbf{D}}_{xy}$ 各行互不相关。以这些采样数据作为虚拟测点的响应信号, 于是得到虚拟测点的响应数据矩阵

$$\tilde{\mathbf{X}}' = \begin{bmatrix} \tilde{x}'_1(t_1) & \tilde{x}'_1(t_2) & \cdots & \tilde{x}'_1(t_{2n}) \\ \tilde{x}'_2(t_1) & \tilde{x}'_2(t_2) & \cdots & \tilde{x}'_2(t_{2n}) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \tilde{x}'_M(t_1) & \tilde{x}'_M(t_2) & \cdots & \tilde{x}'_M(t_{2n}) \end{bmatrix} \quad (5.3-57)$$

若 $n < 2M$, 取 $\tilde{\mathbf{X}}'$ 中的 $n-M$ 行并入式(5.3-8)中的 $\tilde{\mathbf{X}}$ 中, 使 $\tilde{\mathbf{X}}$ 为 $n \times 2n$ 阶矩阵。对 $\tilde{x}'_e(t_k)$ 作同样的延时 $\Delta\tau$ 和 $2\Delta\tau$ 采样, 将得到的数据矩阵 $\tilde{\mathbf{Y}}'$ 、 $\tilde{\mathbf{Z}}'$ 中的相应行并入 $\tilde{\mathbf{Y}}$ 和 $\tilde{\mathbf{Z}}$ 中, 使 $\tilde{\mathbf{Y}}$ 、 $\tilde{\mathbf{Z}}$ 亦为 $n \times 2n$ 阶矩阵。于是, 增广矩阵 $\tilde{\mathbf{D}}_{xy}$ 、 $\tilde{\mathbf{D}}_{yz}$ 满秩, 均为 $2n \times 2n$ 阶。

若 $n > 2M$, 增加 M 个虚拟测点 $\tilde{x}'_e(t_k)$ 仍不能使新的 $\tilde{\mathbf{X}}$ 、 $\tilde{\mathbf{Y}}$ 、 $\tilde{\mathbf{Z}}$ 为 $n \times 2n$ 阶矩阵, 继续采用延时 $\Delta\tau''$ 采样增加虚拟测点, $\Delta\tau''$ 为 Δt 整数倍且 $\Delta\tau'' \neq \Delta\tau$, $\Delta\tau'' \neq \Delta\tau'$, 直到补充足够的虚拟测点使 $\tilde{\mathbf{X}}$ 、 $\tilde{\mathbf{Y}}$ 、 $\tilde{\mathbf{Z}}$ 为 $n \times 2n$ 阶矩阵, 从而 $\tilde{\mathbf{D}}_{xy}$ 、 $\tilde{\mathbf{D}}_{yz}$ 为 $2n \times 2n$ 阶满秩矩阵。

5.3.5 增加采样点数以提高识别精度

前面分析中, 均假设采样点数 s 等于系统自由度数 n 的两倍, 即 $s=2n$ 。这样, 在增加足够的虚拟测点后, 测量数据增广矩阵 $\tilde{\mathbf{D}}_{xy}$ 、 $\tilde{\mathbf{D}}_{yz}$ 均为 $2n \times 2n$ 阶可逆矩阵。可由式(5.3-36)直接得到特征矩阵 $\tilde{\mathbf{A}}$, 再经求解特征方程式(5.3-38)得到特征值和特征矢量。

由于上述方法中使用了恰好的采样数据, 而未能使用更多的数据来减少测量误差, 因而识别精度较低。为此, 可采用增加采样点数的方法增加测量数据, 再用最小二乘法求出特征矩阵 $\tilde{\mathbf{A}}$, 以此为基础求出的特征值和特征矢量将提高识别精度。

增加采样点数使 $s > 2n$, 则 $\tilde{\mathbf{X}}$ 、 $\tilde{\mathbf{Y}}$ 、 $\tilde{\mathbf{Z}}$ 均为 $n \times s$ 阶矩阵, 增广矩阵 $\tilde{\mathbf{D}}_{xy}$ 、 $\tilde{\mathbf{D}}_{yz}$ 为 $2n \times s$ 阶矩阵。此时式(5.3-34)形式的关系不再成立, 但可写成

$$\mathbf{D}_{yz} = \mathbf{A} \mathbf{D}_{xy} \quad (5.3-58)$$

式中 A 仍为 $2n \times 2n$ 阶方阵,现在用最小二乘法识别这一矩阵。对上式做转置,得

$$D_{yx}^T = D_{xy}^T A^T \quad (5.3-59)$$

将实测数据矩阵 \tilde{D}_{xy} 、 \tilde{D}_{yx} 代入上式。由于测量误差,由误差函数矩阵

$$\varepsilon = \tilde{D}_{yx}^T - \tilde{D}_{xy}^T A^T \quad (5.3-60)$$

构造目标函数

$$e = \varepsilon^T \varepsilon \quad (5.3-61)$$

令

$$\frac{\partial e}{\partial A^T} = 0$$

得 A^T 的最小二乘估计

$$\hat{A}^T = (\tilde{D}_{xy} \tilde{D}_{xy}^T)^{-1} \tilde{D}_{xy} \tilde{D}_{yx}^T$$

从而,有

$$\hat{A} = \tilde{D}_{yx} \tilde{D}_{xy}^T (\tilde{D}_{xy} \tilde{D}_{xy}^T)^{-1} \quad (5.3-62)$$

代入特征解方程(5.3-38)可求得特征值和特征矢量,进一步可估算模态参数。

Ibrahim 还提出了双最小二乘的 ITD 法。将式(5.3-58)写成

$$D_{xy} = A^{-1} D_{yx} \quad (5.3-63)$$

按照上面步骤,可求得 A 的另一形式的最小二乘解

$$\hat{A} = \tilde{D}_{yx} \tilde{D}_{yx}^T (\tilde{D}_{xy} \tilde{D}_{yx}^T)^{-1} \quad (5.3-64)$$

求式(5.3-62)和式(5.3-64)的平均作为 A 的最终估算值。用这种方法识别的阻尼精度较高。

5.3.6 考虑噪声模态的 ITD 法

此前,一直假设系统自由度或系统模态数为 n ,识别模态数亦为 n 。事实上,噪声模态会混合在系统模态中,如果识别模态数仍取 n ,将会丢失真实模态。解决的方法是,提高识别模态数到 N , $N > n$,一般取 $N = (3 \sim 7)n$,并增加虚拟测点数,使 \tilde{X} 、 \tilde{Y} 、 \tilde{Z} 均为 $N \times n$ 阶矩阵。为了使用最小二乘法提高识别精度,令采样点数 $s > 2N$ 。识别过程完全同前。

现在的问题是,在所求得的 N 阶模态中,如何识别系统真实模态和噪声虚假模态。针对特征矢量 ψ_{xyi} 的规律性,提出下述两种判别法。

1. 模态置信因子判别法

根据式(5.3-16),式(5.3-39)中特征矢量 ψ_{xyi} 的前 N 个元素组成列阵 p_i 和后 N 个元素组成列阵 q_i ,应有下述关系,即

$$q_i = p_i \Delta_i = p_i e^{\lambda_i \Delta \tau} \quad (5.3-65)$$

写出其中每个元素之间的关系

$$q_{ei} = p_{ei} e^{\lambda_i \Delta \tau} \quad (e = 1, 2, \dots, N) \quad (5.3-66)$$

定义第 i 阶模态在第 e 个测点的模态置信因子

$$(\text{MCF})_e = \left| \frac{p_{ei} e^{\lambda_i \Delta \tau}}{q_{ei}} \right| \quad (e = 1, 2, \dots, N) \quad (5.3-67)$$

对系统模态, $(\text{MCF})_e \approx 1$; 对噪声模态, $(\text{MCF})_e \ll 1$ 或 $(\text{MCF})_e \gg 1$ 。对全部 N 个测点(包括虚

拟测点)来说,估算 $(MCF)_e \approx 1$ 的个数为 N_0 ,定义该阶模态的总体模态置信因子

$$OAMCF = \frac{N_0}{N} \quad (5.3-68)$$

对系统真实模态, $OAMCF \approx 1$;对噪声模态, $OAMCF \ll 1$ 。

2. 模态形状相关系数判别法

式(5.3-65)两端分别左乘 p_i^H 、 q_i^H 得

$$p_i^H q_i = p_i^H p_i e^{\lambda_i \Delta t}$$

$$q_i^H q_i = q_i^H p_i e^{\lambda_i \Delta t}$$

消去 $e^{\lambda_i \Delta t}$,得

$$p_i^H q_i q_i^H p_i = p_i^H p_i q_i^H q_i$$

或写成

$$|p_i^H q_i|^2 = \|p_i\|^2 \|q_i\|^2$$

于是定义该阶模态的模态形状相关系数

$$MSCC = \frac{|p_i^H q_i|}{\|p_i\| \|q_i\|} \quad (5.3-69)$$

式中 $\|\cdot\|$ 表示2范数。对系统模态, $MSCC \approx 1$;对噪声模态, $MSCC \ll 1$ 。

为了更容易区分系统模态和噪声模态,可用 $(MCF)_e^\gamma$ 和 $(MSCC)_e^\gamma$ 代替 $(MCF)_e$ 和 $MSCC$, $\gamma > 1$,如取 $\gamma = 3$ 。

5.4 最小二乘复指数法(LSCE)

最小二乘复指数法(LSCE)又称 Prony 多项式法。与 ITD 法相比,LSCE 法在识别模态频率和模态阻尼时只用一个测点的脉冲响应数据,而不像 ITD 法那样使用全部测点自由响应数据,因而 LSCE 法属于局部识别法。

LSCE 法的基本思想是,以 Z 变换因子表示脉冲响应,Z 变换因子中包含待识别的复频率。构造 Prony 多项式,使其零点等于 Z 变换因子的值。这样,将求解 Z 变换因子转化为求解 Prony 多项式的系数。为了求解这一组系数,构造脉冲响应数据序列的自回归(AR)模型,自回归系数即 Prony 多项式的系数,通过在不同起始点采样,得到关于自回归系数的线性方程组,用最小二乘法可得到自回归系数的解,于是可求得 Prony 多项式的根。再由脉冲响应数据序列构造该测点各阶脉冲响应幅值(留数)的线性方程组,用最小二乘法求解,对各点均作上述识别,得到各阶模态矢量。

因此,LSCE 法的特点是,将对脉冲响应模型中复频率的识别转化为与之等效的自回归模型中自回归系数的识别。两种模型由 Prony 多项式相联系,而自回归系数可通过求解一组线性方程组得到,进而求得复频率。

5.4.1 数学模型

由式(5.3-1),对一 n 个自由度的粘性阻尼系统,结构上第 e 点的自由响应表达式为

$$x_e(t) = \sum_{i=1}^{2n} p_{ei} e^{\lambda_i t} \quad (e=1,2,\dots,M) \quad (5.4-1)$$

式中 $p_n, \lambda_i (i=1, 2, \dots, 2n)$ 后 n 个值为前 n 个对应值的共轭。

由式(1.6-38), 在第 f 点激励、第 e 测点的脉冲响应函数为

$$h_{ef}(t) = \sum_{i=1}^n (R_{efi} e^{s_i t} + R_{efi}^* e^{s_i^* t}) \quad (1.6-38)$$

或简写为

$$h_{ef}(t) = \sum_{i=1}^{2n} R_{efi} e^{s_i t} \quad (5.4-2)$$

式中 $R_{efi}, s_i (i=1, 2, \dots, 2n)$ 后 n 个值为前 n 个对应值的共轭, R_{efi} 为留数, s_i 为极点, 且

$$s_i = -\sigma_{mi} + j\omega_{mi}$$

由于 $s_i = \lambda_i, R_{efi}$ 与 p_n 只差一常数因子, 故自由响应模型式(5.4-1)与脉冲响应函数式(5.4-2)完全等价。下面以脉冲响应函数式(5.4-2)为数学模型介绍 LSCE 法。式中 R_{efi} 和 s_i 为待识别模态参数。

5.4.2 自回归(AR)模型

通过构造 Prony 多项式, 可将脉冲响应时间序列转化为一个自回归模型。

1. Z 变换因子形式的脉冲响应模型

设已获得 $M = n$ 个测点的脉冲响应时间序列 $\tilde{h}_{ef}(t_k) = \tilde{h}_{efk}, t_k = k\Delta t$, 采样点号 $k = 0, 1, 2, \dots, 2n, \Delta t$ 为采样时间间隔, 测点号 $e = 1, 2, \dots, M, M = n$ 。

由式(5.4-2), 对应采样点处脉冲响应函数的理论值 $h_{ef}(t_k) = h_{efk}$ 为

$$h_{efk} = \sum_{i=1}^{2n} R_{efi} e^{s_i k \Delta t} \quad (5.4-3)$$

令

$$z_i = e^{s_i \Delta t} \quad (5.4-4)$$

z_i 为 Z 变换因子, 相当于 ITD 法中的 Δ_i , 则式(5.4-3)成为

$$h_{efk} = \sum_{i=1}^{2n} R_{efi} z_i^k \quad (e = 1, 2, \dots, M) \quad (5.4-5)$$

在识别复频率(极点) s_i 时, 只需一个测点的脉冲响应值, 故将上式中角标 ef 省略, 写成

$$h_k = \sum_{i=1}^{2n} R_i z_i^k \quad (5.4-6)$$

式中 k 为采样点号。这就是以 Z 变换因子表示的脉冲响应函数。其中 R_i 和 z_i 为待识别参数, 均为复数。首先识别 $z_i (i=1, 2, \dots, 2n)$ 。

2. Prony 多项式

构造一个 $2n$ 次实系数多项式, 使其零点为 z_i 。该多项式称为 Prony 多项式, 记为 $P(z)$, 则

$$P(z) = \sum_{p=0}^{2n} a_p z^p = \prod_{i=1}^n (z - z_i)(z - z_i^*) \quad (5.4-7)$$

式中 $a_{2n} = 1$, Prony 多项式中独立的系数 a_p 共有 $2n$ 个, $z_i (i=1, 2, \dots, 2n)$ 是 Prony 方程

$$P(z) = \sum_{p=0}^{2n} a_p z^p = 0 \quad (5.4-8)$$

的 $2n$ 个共轭复根, 即有

$$P(z_i) = \sum_{p=0}^{2n} a_p z_i^p = 0 \quad (5.4-9)$$

这样, 求解式(5.4-6)中 z_i 的问题转化为求解 $2n$ 个 a_p ($p=0, 1, \dots, 2n-1$) 的问题。依据 Prony 多项式, 可将(5.4-6)形式的脉冲响应模型转化为以 a_p 为自回归系数的自回归模型。

3. 自回归(AR)模型

由式(5.4-6), 脉冲响应序列在第 $l+k$ 点的值为

$$h_{l+k} = \sum_{i=1}^{2n} R_i z_i^{l+k} \quad (5.4-10)$$

后面会发现, 这里 l 表示开始采样点号, 即每个样本的起始采样时刻。式(5.4-10)乘以 a_k , 并对 k 从 0 到 $2n$ 求和, 得

$$\sum_{k=0}^{2n} a_k h_{l+k} = \sum_{k=0}^{2n} a_k \sum_{i=1}^{2n} R_i z_i^{l+k} = \sum_{i=1}^{2n} R_i z_i^l \sum_{k=0}^{2n} a_k z_i^k = \sum_{i=1}^{2n} R_i z_i^l P(z_i)$$

考虑式(5.4-9), 上式为

$$\sum_{k=0}^{2n} a_k h_{l+k} = 0 \quad (5.4-11)$$

或写成

$$\sum_{k=0}^{2n-1} a_k h_{l+k} = -h_{l+2n} \quad (5.4-12)$$

即

$$\mathbf{h}_l^T \mathbf{a} = -h_{l+2n} \quad (5.4-13)$$

这是脉冲响应序列的自回归模型, 自回归系数 a_k ($k=0, 1, \dots, 2n-1$) 就是 Prony 多项式的系数。式中

$$\mathbf{h}_l = [h_l \quad h_{l+1} \quad \cdots \quad h_{l+2n-1}]^T \quad (5.4-14)$$

$$\mathbf{a} = [a_0 \quad a_1 \quad \cdots \quad a_{2n-1}]^T \quad (5.4-15)$$

\mathbf{h}_l 为以 l 为起始采样点的含 $2n$ 个采样值的时序样本, \mathbf{a} 为自回归系数列阵, 均为 $2n$ 维实向量。

5.4.3 估算模态参数

1. 求自回归系数

在自回归模型式(5.4-13)中, 令起始采样点号 $l=0, 1, 2, \dots, m$, 得到 $(m+1)$ 个样本的自回归方程, 组成关于 \mathbf{a} 的线性方程组

$$\mathbf{T}\mathbf{a} = -\mathbf{h}_{2n} \quad (5.4-16)$$

式中

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \mathbf{h}_0^T \\ \mathbf{h}_1^T \\ \vdots \\ \mathbf{h}_m^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h_0 & h_1 & \cdots & h_{2n-1} \\ h_1 & h_2 & \cdots & h_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ h_m & h_{m+1} & \cdots & h_{m+2n-1} \end{bmatrix} \quad (5.4-17)$$

$$\mathbf{h}_{2n} = [h_{2n} \quad h_{2n+1} \quad \cdots \quad h_{2n+m}]^T \quad (5.4-18)$$

\mathbf{T} 为 $(m+1) \times 2n$ 阶实矩阵, 称为 Toeplitz 矩阵, 又称 Hankel 矩阵。 \mathbf{h}_{2n} 为 $(m+1)$ 阶实列阵。

设实测得到 Toeplitz 矩阵 $\tilde{\mathbf{T}}$ 和 $\tilde{\mathbf{h}}_{2n}$, 则

$$\tilde{\mathbf{T}}\mathbf{a} = -\tilde{\mathbf{h}}_{2n} + \boldsymbol{\varepsilon}$$

误差向量

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \tilde{\mathbf{h}}_{2n} + \tilde{\mathbf{T}}\mathbf{a} \quad (5.4-19)$$

构造目标函数

$$e = \boldsymbol{\varepsilon}^T \boldsymbol{\varepsilon} = (\tilde{\mathbf{h}}_{2n} + \tilde{\mathbf{T}}\mathbf{a})^T (\tilde{\mathbf{h}}_{2n} + \tilde{\mathbf{T}}\mathbf{a}) \quad (5.4-20)$$

令

$$\frac{\partial e}{\partial \mathbf{a}} = 0$$

设 $m+1 > 2n$, 得 \mathbf{a} 的最小二乘解

$$\mathbf{a} = -(\tilde{\mathbf{T}}^T \tilde{\mathbf{T}})^{-1} \tilde{\mathbf{T}}^T \tilde{\mathbf{h}}_{2n} \quad (5.4-21)$$

2. 估算复模态频率和复模态阻尼比

将由式(5.4-21)求出的 \mathbf{a} 代入 Prony 方程式(5.4-8), 解得 $2n$ 个共轭复根 z_i 。由式(5.4-4), 只取前 n 个 z_i , 按照 ITD 法中估算复模态参数的无量纲算法, 可求得复模态频率 ω_{mi} 和复模态阻尼比 ξ_{mi} 。

3. 估算复模态矢量

将上面估算出的 $2n$ 个 z_i 代入式(5.4-6), 令 $k=0, 1, \dots, 2n-1$, 得关于 $R_i (i=1, 2, \dots, 2n)$ 的线性方程组

$$\mathbf{h}_0 = \mathbf{V}\mathbf{R}' \quad (5.4-22)$$

式中

$$\mathbf{h}_0 = [h_0 \quad h_1 \quad \cdots \quad h_{2n-1}]^T \quad (5.4-23)$$

$$\mathbf{V} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ z_1 & z_2 & \cdots & z_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ z_1^{2n-1} & z_2^{2n-1} & \cdots & z_{2n}^{2n-1} \end{bmatrix} \quad (5.4-24)$$

$$\mathbf{R}' = [R_1 \quad R_2 \quad \cdots \quad R_{2n}]^T \quad (5.4-25)$$

\mathbf{h}_0 、 \mathbf{R}' 为 $2n$ 阶列阵, \mathbf{V} 为 $2n \times 2n$ 阶矩阵, 称为 Vandermonde 矩阵。

设实测得到 $\tilde{\mathbf{V}}$ 和 $\tilde{\mathbf{h}}_0$, 代入式(5.4-22), 解得

$$\mathbf{R}' = \tilde{\mathbf{V}}^{-1} \tilde{\mathbf{h}}_0 \quad (5.4-26)$$

\mathbf{R}' 中前 n 个元素组成的列阵即由各阶模态在第 e 个测点的脉冲响应复幅值(即各阶复模态矢量的第 e 个元素)组成的列阵, 记为 \mathbf{R}_e 。对每个测点的脉冲响应 h_{ek} 做上述识别, 可估算出 n 组模态参数, 包括 n 个 $\mathbf{R}_e (e=1, 2, \dots, n)$, 以 \mathbf{R}_e^T 为行组成模态矩阵

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_1^T \\ \mathbf{R}_2^T \\ \vdots \\ \mathbf{R}_n^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_{11} & R_{12} & \cdots & R_{1n} \\ R_{21} & R_{22} & \cdots & R_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ R_{n1} & R_{n2} & \cdots & R_{nm} \end{bmatrix} \quad (5.4-27)$$

\mathbf{R} 中各列即各阶复模态矢量列阵。

5.4.4 改善识别精度的方法

1. 改善 \mathbf{a} 的识别精度

在式(5.4-16)中,样本个数为 $(m+1)$,适当增加样本个数,可提高 \mathbf{a} 的识别精度。

2. 改善 \mathbf{R}' 的识别精度

在式(5.4-22)中,采样点数为 $2n$,增加采样点数至 $s > 2n$,即 $k=0,1,\cdots,s-1$,则 \mathbf{h}_0 为 s 阶列阵, \mathbf{V} 为 $s \times 2n$ 阶矩阵, \mathbf{R}' 仍为 $2n$ 阶列阵,则可求得 \mathbf{R}' 的最小二乘解

$$\mathbf{R}' = (\tilde{\mathbf{V}}^T \tilde{\mathbf{V}})^{-1} \tilde{\mathbf{V}}^T \tilde{\mathbf{h}}_0 \quad (5.4-28)$$

它比用式(5.4-26)估算出的 \mathbf{R}' 有更高的识别精度。

5.4.5 模型定阶问题

前述 LSCE 法将脉冲响应函数作为数学模型,而脉冲响应函数由频响应函数求得,故不存在随机噪声模态,也不存在模型定阶问题。

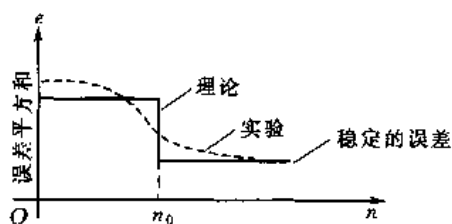


图 5.4-1 总方差 e 与模型阶次 n 的关系 实际阶次 n_0 ,如图 5.4-1 所示。在参数识别理论中,这种定阶方法称为损失函数检验法。

最后指出,由于 LSCE 法是利用脉冲响应或自由响应时间序列的 AR 模型来识别模态参数,因此 LSCE 法是一种时序分析法。

5.5 ARMA 时序分析法

在最小二乘复指数法(LSCE 法)中,通过 Prony 多项式建立了脉冲响应与 AR 时序模型的等价关系,通过 AR 模型识别模态参数。本节将利用差分方程和 Z 变换,分别建立强迫振动方程与 ARMA 模型、传递函数与 ARMA 模型的等价关系,由 ARMA 模型识别模态参数。

由于 ARMA 模型对应系统的强迫动力响应模型,因而 ARMA 时序分析法利用的时间序列是激励和响应两种时间序列。能激发出系统各阶模态的常用激励信号有随机激励和猝发激励两种,因此,ARMA 时序法中响应信号可以是随机和衰减两种信号。如果用猝发激励,则使用 LSCE 法更加方便,所以 ARMA 法中使用的激励和响应信号一般为随机信号。

与 LSCE 法相同,只使用一个测点的 ARMA 模型,就可以识别出各阶极点,因而也属于局部识别法。

5.5.1 ARMA 模型

设系统输入 $f(t)$ 的离散值为 $f(t_k) = f(k\Delta t) = f_k (k=0,1,2,\dots)$, 输出 $x(t)$ 的离散值为 $x(t_k) = x(k\Delta t) = x_k, \Delta t$ 为采样时间间隔。对确定性系统,系统输入输出有以下关系,即

$$x_k - \sum_{l=1}^p a_l x_{k-l} = b_0 f_k - \sum_{l=1}^q b_l f_{k-l} \quad (5.5-1)$$

或写成

$$x_k = \sum_{l=1}^p a_l x_{k-l} + b_0 f_k - \sum_{l=1}^q b_l f_{k-l} \quad (5.5-2)$$

式(5.5-1)或式(5.5-2)称为该系统的自回归滑动平均模型,即 ARMA 模型,式中 $a_l (l=1, 2, \dots, p)$ 、 $b_l (l=1, 2, \dots, q)$ 分别称为自回归系数和滑动平均系数, p, q 称为 ARMA 模型的阶次,且 $p \geq q$ 。

对确定性系统,自回归系数 a_l 和滑动平均系数 b_l 是确定性实数,因而 a_l, b_l 反映了系统的固有特性。

由式(5.5-2)看出,系统当前的响应 x_k 是以往 p 个响应值 $x_{k-l} (l=1, 2, \dots, p)$ 和当前激励值 f_k 及以往 q 个激励值 $f_{k-l} (l=1, 2, \dots, q)$ 的线性组合,因此,是一个线性差分方程,形式简单。它反映了当前响应与当前激励及与以往响应和激励的关系,或者说,可以用过去的激励与响应值预测未来的响应。

如果 $b_l = 0 (l=0, 1, 2, \dots, q)$, 则式(5.5-2)成为

$$x_k = \sum_{l=1}^p a_l x_{k-l} \quad (5.5-3)$$

即自回归(AR)模型。若 $a_l = 0 (l=1, 2, \dots, p)$, 则式(5.5-1)成为

$$x_k = b_0 f_k - \sum_{l=1}^q b_l f_{k-l} \quad (5.5-4)$$

即滑动平均(MA)模型。所以,AR 模型和 MA 模型为 ARMA 模型的特殊情形。

除式(5.5-1)差分方程形式的 ARMA 模型外,还可用时移算子表示为更简洁的形式。

定义时移算子 D' 为

$$D'x_k = x_{k-1} \quad (5.5-5)$$

则 ARMA 模型式(5.5-1)可以写成时移算子形式

$$a(D)x_k = b(D)f_k \quad (5.5-6)$$

式中算子 $a(D)$ 和 $b(D)$ 为

$$\left. \begin{aligned} a(D) &= 1 - \sum_{l=1}^p a_l D'^l \\ b(D) &= b_0 - \sum_{l=1}^q b_l D'^l \end{aligned} \right\} \quad (5.5-7)$$

最后指出,当系统输入 $f(t)$ 是均值为零的平稳随机信号时,ARMA 模型中 $b_0 = 1$ 。

5.5.2 强迫振动方程与 ARMA 模型的等价关系

1. 单自由度系统

单自由度粘性阻尼系统振动微分方程为

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = f(t) \quad (1.2-1)$$

将其离散化, 令 $t = k\Delta t, k=1, 2, \dots$ 为离散点号, Δt 为离散时间步长, 则

$$x = x(k\Delta t) = x_k, \quad f(t) = f(k\Delta t) = f_k$$

$$\dot{x} = \frac{1}{\Delta t}(x_k - x_{k-1}) = \dot{x}_k$$

$$\ddot{x} = \frac{1}{\Delta t}(\dot{x}_k - \dot{x}_{k-1}) = \frac{1}{(\Delta t)^2}(x_k - 2x_{k-1} + x_{k-2})$$

代入式(1.2-1), 得

$$x_k - \sum_{l=1}^2 a_l x_{k-l} = b_0 f_k \quad (5.5-8)$$

式中

$$\left. \begin{aligned} a_1 &= \frac{2m + c\Delta t}{m + c\Delta t + k(\Delta t)^2} \\ a_2 &= -\frac{m}{m + c\Delta t + k(\Delta t)^2} \\ b_0 &= \frac{(\Delta t)^2}{m + c\Delta t + k(\Delta t)^2} \end{aligned} \right\} \quad (5.5-9)$$

式(5.5-8)是一个与振动微分方程(1.2-1)等价的差分方程, 显然是一个 $p=2, q=0$ 的 ARMA 模型, 其自回归系数和滑动平均系数与系统固有特性 m, c, k 和离散步长 Δt 有关。对确定性的单自由度系统, 当 Δt 一定时, 自回归系数和滑动平均系数是确定性的。因此, 一旦确定这些系数, 可通过式(5.5-9)求得振动系统的质量 m 、阻尼系数 c 和刚度 k 。

2. 多自由度系统

对 n 个自由度的粘性阻尼系统, 振动微分方程为

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{x}} + \mathbf{K}\mathbf{x} = \mathbf{f}(t) \quad (1.4-38)$$

它等价于一个 $2n$ 阶非齐次微分方程组。假设单点激励为 $f(t)$, 写出某个物理坐标 x 的振动微分方程

$$\begin{aligned} &\alpha_{2n}x^{(2n)} + \alpha_{2n-1}x^{(2n-1)} + \dots + \alpha_1\dot{x} + \alpha_0x \\ &= \beta_{2n-2}f^{(2n-2)}(t) + \beta_{2n-3}f^{(2n-3)}(t) + \dots + \beta_1\dot{f}(t) + \beta_0f(t) \end{aligned} \quad (5.5-10)$$

将式(5.5-10)离散化, 得到差分方程

$$x_k - \sum_{l=1}^{2n} a_l x_{k-l} = b_0 f_k - \sum_{l=1}^{2n-2} b_l f_{k-l} \quad (5.5-11)$$

这是一个阶次为 $p=2n, q=2n-2$ 的 ARMA 模型, 系数 a_l, b_l 在离散时间步长 Δt 一定时只与系统的固有特性 $\mathbf{M}, \mathbf{C}, \mathbf{K}$ 有关。对多点激励情形, 也有类似式(5.5-11)的 ARMA 模型。

由此得出结论, n 个自由度振动系统的强迫振动方程可以用 ARMA 模型表示, 模型阶次 $p=2n, q=2n-2$ 。

5.5.3 传递函数与 ARMA 模型的等价关系

1. Z 变换

时间序列 x_k 的拉氏变换为

$$X(s) = \sum_{k=0}^{\infty} x_k e^{-ks\Delta t} \quad (5.5-12)$$

式中 Δt 为采样时间间隔。拉氏变换将序列 x_k 从时域变换到 s 域, $s = \sigma + j\omega$ 。令

$$z = e^{s\Delta t} \quad (5.5-13)$$

为 Z 变换因子, 式(5.5-12)成为

$$X(z) = \sum_{k=0}^{\infty} x_k z^{-k} \quad (5.5-14)$$

记为

$$X(z) = \mathcal{Z}(x_k) \quad (5.5-15)$$

$X(z)$ 称为 x_k 的 Z 变换。它将序列 x_k 从时域变换到 z 平面。 z 为复数。Z 变换与拉氏变换完全等价, 具有相同的性质, 如线性性质、位移定理、时移性质、卷积定理、初值定理、终值定理等。在此用到的是时移性质:

$$\mathcal{Z}(x_{k-l}) = z^{-l} X(z) \quad (5.5-16)$$

对式(5.5-5)作 Z 变换, 有

$$D^l X(z) = \mathcal{Z}(x_{k-l})$$

所以

$$D^l = z^{-l} \quad (5.5-17)$$

即时移算子 D 等价于 Z 变换因子的倒数 z^{-1} 。

由于 Z 变换形式简洁, 因此在信号处理中具有重要地位。

2. 传递函数与 ARMA 模型的等价关系

对时移算子形式的 ARMA 模型式(5.5-6)作 Z 变换, 并考虑式(5.5-17), 得 Z 变换形式的 ARMA 模型

$$a(z)X(z) = b(z)F(z) \quad (5.5-18)$$

式中 $X(z) = \mathcal{Z}(x_k)$, $F(z) = \mathcal{Z}(f_k)$, 且

$$\left. \begin{aligned} a(z) &= 1 - \sum_{l=1}^p a_l z^{-l} \\ b(z) &= b_0 - \sum_{l=1}^q b_l z^{-l} \end{aligned} \right\} \quad (p=2n, q=2n-2) \quad (5.5-19)$$

由式(5.5-18)得 Z 变换形式的传递函数

$$H(z) = \frac{X(z)}{F(z)} = \frac{b(z)}{a(z)} = \frac{b_0 - \sum_{l=1}^q b_l z^{-l}}{1 - \sum_{l=1}^p a_l z^{-l}} \quad (5.5-20)$$

因此, 系统的传递函数与 ARMA 模型等价。

Z 变换形式的传递函数式(5.5-20)不仅与传递函数式(1.6-27)完全等价, 还具相同的

形式。如果已估算出 ARMA 模型的系数 a_l, b_l , 由式(5.5-20)可进一步求其极点和留数。

令

$$a(z) = 1 - \sum_{l=1}^p a_l z^{-l} = 0 \quad (5.5-21)$$

称为 ARMA 模型的特征方程, 式中 $p=2n$, 解得 $2n$ 个共轭复根 z_i , 由式(5.5-13)有

$$z_i = e^{s_i \Delta t} \quad (5.5-22)$$

由式(1.6-29)可估算该测点处系统各阶模态的留数

$$R_{eff} = \frac{b(z)}{a'(z)} \Big|_{z=z_i} \quad (5.5-23)$$

式中 $a'(z) = \frac{da(z)}{dz}$ 。

5.5.4 估算模态参数

首先由某测点的 ARMA 模型估算自回归系数 a_l 和滑动平均系数 b_l , 再由 Z 变换形式的传递函数求极点和留数, 进一步可得各种模态参数。

1. 估算 ARMA 模型的系数 a_l 和 b_l

设已得到单点激励下某测点的响应 \hat{x}_k 和激励 \hat{f}_k 。由式(5.5-2)建立系统的 ARMA 模型, 其中 $p=2n, q=2n-2$, 则

$$x_k = \sum_{l=1}^{2n} a_l x_{k-l} + b_0 f_k - \sum_{l=1}^{2n-2} b_l f_{k-l} \quad (5.5-24)$$

在采样点 $k+2n$ 处有

$$x_{k+2n} = \sum_{l=1}^{2n} a_l x_{k+2n-l} + b_0 f_{k+2n} - \sum_{l=1}^{2n-2} b_l f_{k+2n-l} = \mathbf{p}_k^T \boldsymbol{\theta} \quad (5.5-25)$$

式中

$$\mathbf{p}_k = [x_{k+2n-1} \quad x_{k+2n-2} \quad \cdots \quad x_k \quad f_{k+2n} \quad -f_{k+2n-1} \quad -f_{k+2n-2} \quad \cdots \quad -f_{k+2}]^T \quad (5.5-26)$$

$$\boldsymbol{\theta} = [a_1 \quad a_2 \quad \cdots \quad a_{2n} \quad b_0 \quad b_1 \quad \cdots \quad b_{2n-2}]^T \quad (5.5-27)$$

$\mathbf{p}_k, \boldsymbol{\theta}$ 均为 $(4n-1)$ 阶列阵。

令起始采样点号 $k=0, 1, 2, \cdots, m$, 得

$$\mathbf{x} = \mathbf{P}\boldsymbol{\theta} \quad (5.5-28)$$

式中

$$\mathbf{x} = [x_{2n} \quad x_{2n+1} \quad \cdots \quad x_{2n+m}]^T \quad (5.5-29)$$

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} \mathbf{p}_0^T \\ \mathbf{p}_1^T \\ \vdots \\ \mathbf{p}_m^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{2n-1} & x_{2n-2} & \cdots & x_0 & f_{2n} & -f_{2n-1} & -f_{2n-2} & \cdots & -f_2 \\ x_{2n} & x_{2n-1} & \cdots & x_1 & f_{2n+1} & -f_{2n} & -f_{2n-1} & \cdots & -f_3 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_{2n+m-1} & x_{2n+m-2} & \cdots & x_m & f_{2n+m} & -f_{2n+m-1} & -f_{2n+m-2} & \cdots & -f_{m+2} \end{bmatrix} \quad (5.5-30)$$

\mathbf{x} 为 $(m+1)$ 阶列阵, \mathbf{P} 为 $(m+1) \times (4n-1)$ 阶矩阵。

设实际测得 \tilde{x} 和 \tilde{P} , 应用最小二乘法, 由式(5.5-28)得误差函数

$$\varepsilon = \tilde{x} - \tilde{P}\theta \quad (5.5-31)$$

总方差(目标函数)

$$e = \varepsilon^T \varepsilon = (\tilde{x} - \tilde{P}\theta)^T (\tilde{x} - \tilde{P}\theta) \quad (5.5-32)$$

令

$$\frac{\partial e}{\partial \theta} = 0$$

可解得 θ 的最小二乘估计值

$$\theta = (\tilde{P}^T \tilde{P})^{-1} \tilde{P}^T \tilde{x} \quad (5.5-33)$$

2. 估算复模态频率 ω_{mi} 和复模态阻尼比 ζ_{mi}

将上面估算出的 θ 即 a_i, b_i 代入特征方程式(5.5-21), 解得 $2n$ 个共轭复根 z_i , 代入式(5.5-22), 利用 5.3 节介绍的无量纲估算法, 可得 $\omega_{mi}, \sigma_{mi}, \omega_{mi}, \zeta_{mi}$ 。

3. 估算复模态矢量

将上面求得的 z_i 代入式(5.5-23), 可解得该测点处各阶模态对应的留数 R_{efi} ($i=1, 2, \dots, n$)。对所有测点的 ARMA 模型重复上述估算过程, 可求得 R_{efi} ($e=1, 2, \dots, n; i=1, 2, \dots, n$), 组成留数矩阵

$$R = \begin{bmatrix} R_{1f1} & R_{1f2} & \cdots & R_{1fn} \\ R_{2f1} & R_{2f2} & \cdots & R_{2fn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ R_{nf1} & R_{nf2} & \cdots & R_{nfn} \end{bmatrix} \quad (5.5-34)$$

矩阵 R 中各列即为系统各阶模态的复模态矢量。

5.6 多参考点复指数法(PRCE)

前述三节时域识别方法均是建立在单点激励基础上的。由于激励能量的限制, 从航空航天领域内开始, 陆续发展了几种 MIMO 时域整体识别法, 即有多参考点复指数法(PRCE)、特征系统实现法(ERA)和直接参数模型识别法(DPMI)。它们分别源于单点激励下的最小二乘复指数法、ITD 法和 ARMA 时序法。

本节介绍 PRCE 法。该种方法的数学模型为基于 MIMO 的脉冲响应矩阵。

5.6.1 数学模型

n 个自由度粘性阻尼系统脉冲响应函数式(1.5-61)的矩阵形式为

$$h(t) = [\psi \quad \psi^*] \begin{bmatrix} e^{A_t} & 0 \\ 0 & e^{A^* t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \text{diag} \left[\frac{1}{a_i} \right] & 0 \\ 0 & \text{diag} \left[\frac{1}{a_i^*} \right] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \psi^T \\ \psi^H \end{bmatrix} \quad (5.6-1)$$

式中 $e^{A_t} = \text{diag}[e^{\lambda_i t}]$, $e^{A^* t} = \text{diag}[e^{\lambda_i^* t}]$ 。上式写成

$$h(t) = \bar{\psi} e^{\bar{A} t} \Gamma \quad (5.6-2)$$

式中

$$\bar{\psi} = [\psi \quad \psi^*] \quad (5.6-3)$$

$$e^{\bar{A}t} = \begin{bmatrix} e^{At} & 0 \\ 0 & e^{A^*t} \end{bmatrix} \quad (5.6-4)$$

$$\Gamma = \begin{bmatrix} \text{diag}\left[\frac{1}{a_i}\right] & 0 \\ 0 & \text{diag}\left[\frac{1}{a_i^*}\right] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \psi^T \\ \psi^H \end{bmatrix} \quad (5.6-5)$$

分别为 $n \times 2n$ 阶、 $2n \times 2n$ 阶、 $2n \times n$ 阶复矩阵, Γ 称为模态参与因子矩阵。

若激励点 $f=1, 2, \dots, L$, 响应点 $e=1, 2, \dots, M$, 则得到 $M \times L$ 阶脉冲响应矩阵 $h(t)$ 。式(5.6-2)中矩阵 $\bar{\psi}$ 、 $e^{\bar{A}t}$ 、 Γ 阶数分别为 $M \times 2n$ 、 $2n \times 2n$ 、 $2n \times L$, 其中 Γ 为由式(5.6-5)取 $\begin{bmatrix} \psi^T \\ \psi^H \end{bmatrix}$ 对应激励点的 L 列得到。

对式(5.6-2)做转置, 得

$$h^T(t) = \Gamma^T e^{\bar{A}t} \bar{\psi}^T \quad (5.6-6)$$

写出 $h^T(t)$ 中第 e 列, 为方便, 记为

$$h_e(t) = \Gamma^T e^{\bar{A}t} \bar{\psi}_e \quad (5.6-7)$$

式中 $h_e(t)$ 、 $\bar{\psi}_e$ 分别表示 $h^T(t)$ 、 $\bar{\psi}^T$ 的第 e 列, 分别为 L 阶和 $2n$ 阶列阵。

令采样点 $t_k = k\Delta t$, 采样点号 $k=0, 1, 2, \dots, s$, 则式(5.6-7)在任一采样点处的值为

$$h_e(k) = \Gamma^T e^{\bar{A}k\Delta t} \bar{\psi}_e = \Gamma^T Z^k \bar{\psi}_e \quad (5.6-8)$$

($e=1, 2, \dots, M; \quad k=0, 1, 2, \dots, s$)

式中

$$Z = e^{\bar{A}\Delta t} \quad (5.6-9)$$

为 Z 变换因子矩阵, $2n \times 2n$ 阶。将式(5.6-8)按采样点号排列起来

$$\begin{bmatrix} h_e(0) \\ h_e(1) \\ \vdots \\ h_e(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Gamma^T \\ \Gamma^T Z \\ \vdots \\ \Gamma^T Z^s \end{bmatrix} \bar{\psi}_e \quad (5.6-10)$$

记为

$$h_e = G \bar{\psi}_e \quad (5.6-11)$$

式中

$$h_e = \begin{bmatrix} h_e(0) \\ h_e(1) \\ \vdots \\ h_e(s) \end{bmatrix}_{(s+1)L \times 1}, \quad G = \begin{bmatrix} \Gamma^T \\ \Gamma^T Z \\ \vdots \\ \Gamma^T Z^s \end{bmatrix}_{(s+1)L \times 2n} \quad (5.6-12)$$

取采样点数 s , 使 $sL \geq 2n$, 则 G 行数比列数至少多 L 个。根据矩阵理论, 存在 $L \times (s+1)L$ 阶行满秩矩阵

$$A = [A_0 \quad A_1 \quad \cdots \quad A_{s-1} \quad A_s] \quad (5.6-13)$$

$A_p (p=0, 1, 2, \dots, s)$ 为 $L \times L$ 阶满秩矩阵, 且 $A_s = I$, 使

$$AG = 0 \quad (5.6-14)$$

记

$$P(Z) = AG = \sum_{p=0}^s A_p F^T Z^p \quad (5.6-15)$$

为 $L \times 2n$ 阶矩阵, 则式(5.6-14)写成

$$P(Z) = 0 \quad (5.6-16)$$

与式(5.4-7)比较, 式(5.6-15)相当于 Prony 多项式。这样, 将求解式(5.6-2)中特征值转化为求式(5.6-15)中系数矩阵 A_p 或 A 的问题。

与最小二乘复指数法相同, 通过构造脉冲响应函数的 AR 模型, 进一步可求得矩阵 A 。设起始采样点号为 l , 由式(5.6-10), 有

$$\begin{bmatrix} h_e(l) \\ h_e(l+1) \\ \vdots \\ h_e(l+s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F^T Z^l \\ F^T Z^{l+1} \\ \vdots \\ F^T Z^{l+s} \end{bmatrix} \bar{\psi}_e \quad (5.6-17)$$

左乘 A 并展开, 考虑式(5.6-16)得

$$\sum_{k=0}^s A_k h_e(l+k) = \left(\sum_{k=0}^s A_k F^T Z^k \right) Z^l \bar{\psi}_e = P(Z) Z^l \bar{\psi}_e = 0 \quad (5.6-18)$$

或写成

$$\sum_{k=0}^{s-1} A_k h_e(l+k) = -h_e(l+s) \quad (5.6-19)$$

即

$$\bar{A} h_e = -h_e(l+s) \quad (5.6-20)$$

这是脉冲响应序列的 AR 模型。式中

$$\bar{A} = [A_0 \quad A_1 \quad \cdots \quad A_{s-1}] \quad (L \times sL \text{ 阶}) \quad (5.6-21)$$

$$h_e = \begin{Bmatrix} h_e(l) \\ h_e(l+1) \\ \vdots \\ h_e(l+s-1) \end{Bmatrix} \quad (sL \times 1 \text{ 阶}) \quad (5.6-22)$$

5.6.2 估算模态参数

1. 估算自回归系数矩阵 \bar{A}

在脉冲响应自回归模型式(5.6-20)中, 令起始采样点号 $l=0, 1, 2, \dots, m$, 响应点号 $e=0, 1, 2, \dots, M$, 分别按列排列, 写成矩阵形式为

$$\bar{A}T = -R \quad (5.6-23)$$

式中

$$T = [T_1 \quad T_2 \quad \cdots \quad T_M] \quad (sL \times (m+1)M \text{ 阶}) \quad (5.6-24)$$

$$R = [R_1 \quad R_2 \quad \cdots \quad R_M] \quad (L \times (m+1)M \text{ 阶}) \quad (5.6-25)$$

$$T_e = [h_{e0} \quad h_{e1} \quad \cdots \quad h_{em}] = \begin{bmatrix} h_e(0) & h_e(1) & \cdots & h_e(m) \\ h_e(1) & h_e(2) & \cdots & h_e(m+1) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ h_e(s-1) & h_e(s) & \cdots & h_e(m+s-1) \end{bmatrix} \quad (sL \times (m+1) \text{ 阶}) \quad (5.6-26)$$

$$R_e = [h_e(s) \quad h_e(s+1) \quad \cdots \quad h_e(s+m)] \quad (L \times (m+1) \text{ 阶}) \quad (5.6-27)$$

其中 T_e, R_e 中元素 $h_e(k)$ 为 L 阶列阵。

设 T 为行满秩矩阵, 由式(5.6-23), 得 \bar{A} 的最小二乘解

$$\bar{A} = -RT^T(TT^T)^{-1} = -\sum_{e=1}^M R_e T_e^T \left(\sum_{e=1}^M T_e T_e^T \right)^{-1} \quad (5.6-28)$$

实际计算时, 由于 T_e 的阶数很高, 使用上式求逆时容易出现病态, 故可采用 QL 分解。 T 为行满秩矩阵, 做 QL 分解得

$$T = LQ \quad (5.6-29)$$

式中 L 为 $sL \times sL$ 阶具有正对角元素的下三角矩阵, Q 为 $sL \times (m+1)M$ 阶行正交矩阵, 即

$$QQ^T = I \quad (5.6-30)$$

式中 I 为 $sL \times sL$ 阶单位矩阵。式(5.6-29)代入式(5.6-23), 右乘 Q^T , 考虑上式得

$$\bar{A}L = -RQ^T \quad (5.6-31)$$

则

$$\bar{A} = -RQ^T L^{-1} \quad (5.6-32)$$

2. 估算复频率 λ_i

求得系数矩阵 \bar{A} 后, 即得矩阵

$$A = [\bar{A} \quad A_s] = [\bar{A} \quad I] \quad (5.6-33)$$

取式(5.6-16)一列, 考虑式(5.6-15), 得

$$\left(\sum_{p=0}^s A_p z_i^p \right) \Gamma_i = 0 \quad (5.6-34)$$

或

$$p(z_i) \Gamma_i = 0 \quad (5.6-35)$$

式中

$$p(z_i) = \sum_{p=0}^s A_p z_i^p \quad (5.6-36)$$

为 $L \times L$ 阶矩阵, Γ_i 为 Γ^T 的第 i 列, L 阶,

$$z_i = e^{\lambda_i \Delta t} \quad (5.6-37)$$

由于 $\Gamma_i \neq 0$, 则

$$\det p(z_i) = 0 \quad (5.6-38)$$

解之, 得 s 个 z_i , 取 $s = 2n$, 即有 $s = 2n$ 个极点 z_i , 由式(5.6-37)进一步可求得 $2n$ 个 λ_i 。由式(5.6-35)可求得 $2n$ 个 Γ_i , 按列排列得

$$\Gamma^T = [\Gamma_1 \quad \Gamma_2 \quad \cdots \quad \Gamma_{2n}] \quad (L \times 2n \text{ 阶}) \quad (5.6-39)$$

3. 估算模态矢量

求得 z_e 或 Z 及 Γ^T 后,由式(5.6-12)求得 G ,由式(5.6-11)可求得

$$\bar{\psi}_e = G^+ h_e = (G^T G)^{-1} G^T h_e \quad (e=1, 2, \dots, M) \quad (5.6-40)$$

按列排列,得

$$\bar{\Psi}^T = [\bar{\psi}_1 \quad \bar{\psi}_2 \quad \dots \quad \bar{\psi}_M] \quad (2n \times M \text{ 阶})$$

则

$$\bar{\Psi} = [\bar{\psi}_1 \quad \bar{\psi}_2 \quad \dots \quad \bar{\psi}_M]^T \quad (M \times 2n \text{ 阶}) \quad (5.6-41)$$

其前 n 列即 n 个模态矢量。

5.7 特征系统实现法(ERA)

特征系统实现法(ERA)以由 MIMO 得到的脉冲响应函数为基本模型,通过构造广义 Hankel 矩阵,利用奇异值分解技术,得到系统的最小实现,从而得到最小阶数的系统矩阵,以此为基础进一步可识别系统的模态参数。由于使用了现代控制理论中的最小实现原理,使计算量大大减少。该方法理论推导严密、技术先进、计算量小,是当时乃至目前最完善、最先进的方法之一。

5.7.1 状态方程

设 n 个自由度粘性阻尼系统,第 1 章曾得到形如式(1.5-1)的状态方程,这里写成另外一种形式,即

$$\dot{y} = Ay + Bf(t) \quad (5.7-1)$$

式中状态空间矢量

$$y = \begin{bmatrix} x \\ \dot{x} \end{bmatrix} \quad (2n \times 1 \text{ 阶}) \quad (5.7-2)$$

系统矩阵

$$A = \begin{bmatrix} 0 & I \\ -M^{-1}K & -M^{-1}C \end{bmatrix} \quad (2n \times 2n \text{ 阶}) \quad (5.7-3)$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 \\ M^{-1} \end{bmatrix} \quad (2n \times n \text{ 阶}) \quad (5.7-4)$$

激励列阵 $f(t)$ 的阶数为 n 。

设测量响应点数为 M ,激励点数为 L ,则系统矩阵 B 的阶数为 $2n \times L$ 阶,激励列阵阶数为 L 。输出向量

$$z = Gy \quad (5.7-5)$$

式中 G 称为观测矩阵, $M \times 2n$ 阶;输出向量 z 为 M 阶列阵,可以是位移、速度或加速度。上式亦称为观测方程。

系统矩阵 A 、 B 和观测矩阵 G 一起构成了系统的一个实现,它们是与系统固有特性有关的量,记为 $[A, B, G]$ 。如果激励点和响应点数均为 n ,则 $G = [I \quad 0]_{n \times 2n}$ (当输出向量 $z = x$),或 $G = [0 \quad I]_{n \times 2n}$ (当输出向量 $z = \dot{x}$)。

实际处理的系统均为时间离散系统。下面讨论时间离散系统的状态方程和观测方程。

状态方程式(5.7-1)的解为

$$\mathbf{y}(t) = e^{At} \mathbf{y}(0) + \int_0^t e^{A(t-\tau)} \mathbf{B} \mathbf{f}(\tau) d\tau \quad (5.7-6)$$

式中

$$e^{At} = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{A^i t^i}{i!} \quad (5.7-7)$$

设离散时间点为 $k=0, 1, 2, \dots, s$, 采样时间间隔为 Δt , 则 $t = k\Delta t$ 。由式(5.7-6)有

$$\mathbf{y}(k\Delta t) = e^{A k \Delta t} \mathbf{y}(0) + \int_0^{k\Delta t} e^{A(k\Delta t-\tau)} \mathbf{B} \mathbf{f}(\tau) d\tau \quad (5.7-8)$$

$$\mathbf{y}((k+1)\Delta t) = e^{A(k+1)\Delta t} \mathbf{y}(0) + \int_0^{(k+1)\Delta t} e^{A(k\Delta t+\Delta t-\tau)} \mathbf{B} \mathbf{f}(\tau) d\tau \quad (5.7-9)$$

式(5.7-9) - $e^{A\Delta t} \times$ 式(5.7-8), 得

$$\begin{aligned} \mathbf{y}((k+1)\Delta t) &= e^{A\Delta t} \mathbf{y}(k\Delta t) + \int_{k\Delta t}^{(k+1)\Delta t} e^{A(k\Delta t+\Delta t-\tau)} \mathbf{B} \mathbf{f}(\tau) d\tau \\ &= e^{A\Delta t} \mathbf{y}(k\Delta t) + e^{A\Delta t} \mathbf{B} \mathbf{f}(k\Delta t) \Delta t \end{aligned} \quad (5.7-10)$$

令

$$\mathbf{A}_1 = e^{A\Delta t} \quad (2n \times 2n \text{ 阶}) \quad (5.7-11)$$

$$\mathbf{B}_1 = e^{A\Delta t} \mathbf{B} \Delta t = \mathbf{A}_1 \mathbf{B} \Delta t \quad (2n \times L \text{ 阶}) \quad (5.7-12)$$

并简记 $k\Delta t$ 为 k , 则式(5.7-10)成为

$$\mathbf{y}(k+1) = \mathbf{A}_1 \mathbf{y}(k) + \mathbf{B}_1 \mathbf{f}(k) \quad (5.7-13)$$

这就是时间离散系统的状态方程, 系统矩阵为 \mathbf{A}_1 、 \mathbf{B}_1 。

由式(5.7-5), 离散时间系统的观测方程为

$$\mathbf{z}(k) = \mathbf{G} \mathbf{y}(k) \quad (5.7-14)$$

称 $[\mathbf{A}_1, \mathbf{B}_1, \mathbf{G}]$ 为时间离散系统的一个实现。一个系统可以有无穷多个实现。可以证明, 对任意一个 $2n \times 2n$ 阶非奇异方阵 \mathbf{T} , $[\mathbf{T}^{-1} \mathbf{A}_1 \mathbf{T}, \mathbf{T}^{-1} \mathbf{B}_1, \mathbf{G} \mathbf{T}]$ 都是系统的实现, 其中阶次最小的实现称为最小实现。最小实现理论是指, 已知观测向量 $\mathbf{z}(k)$, 构造常值矩阵 \mathbf{A}_1 、 \mathbf{B}_1 、 \mathbf{G} , 使 $[\mathbf{A}_1, \mathbf{B}_1, \mathbf{G}]$ 的阶次最小。

具有最小实现的系统是完全能控和能观的。定义能控性矩阵 \mathbf{Q} 和能观性矩阵 \mathbf{P} 如下:

$$\mathbf{Q} = [\mathbf{B}_1 \quad \mathbf{A}_1 \mathbf{B}_1 \quad \mathbf{A}_1^2 \mathbf{B}_1 \quad \cdots \quad \mathbf{A}_1^{2n-1} \mathbf{B}_1] \quad (2n \times 2nL \text{ 阶}) \quad (5.7-15)$$

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} \mathbf{G} \\ \mathbf{G} \mathbf{A}_1 \\ \mathbf{G} \mathbf{A}_1^2 \\ \vdots \\ \mathbf{G} \mathbf{A}_1^{2n-1} \end{bmatrix} \quad (2nM \times 2n \text{ 阶}) \quad (5.7-16)$$

系统是能控的充要条件

$$\text{rank} \mathbf{Q} = 2n \quad (5.7-17)$$

系统是能观的充要条件

$$\text{rank} \mathbf{P} = 2n \quad (5.7-18)$$

5.7.2 脉冲响应函数

由式(5.5-14), Z 变换形式的传递函数为

$$\mathbf{H}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{h}(k) z^{-k} \quad (5.7-19)$$

式中 $z = e^{sT}$ 为 Z 变换因子, $s = \sigma + j\omega$ 为复数域(拉氏变换域); $\mathbf{H}(z)$ 为 Z 变换形式的传递函数矩阵, $M \times L$ 阶; $\mathbf{h}(k)$ 为脉冲响应函数矩阵, $M \times L$ 阶。

对式(5.7-13)、式(5.7-14)进行 Z 变换, 并注意 Z 变换时移性质式(5.5-16), 有

$$z\mathbf{Y}(z) = \mathbf{A}_1 \mathbf{Y}(z) + \mathbf{B}_1 \mathbf{F}(z) \quad (5.7-20)$$

$$\mathbf{Z}(z) = \mathbf{G} \mathbf{Y}(z) \quad (5.7-21)$$

由式(5.7-20)解出

$$\mathbf{Y}(z) = (z\mathbf{I} - \mathbf{A}_1)^{-1} \mathbf{B}_1 \mathbf{F}(z)$$

代入式(5.7-21), 得

$$\mathbf{Z}(z) = \mathbf{G}(z\mathbf{I} - \mathbf{A}_1)^{-1} \mathbf{B}_1 \mathbf{F}(z) = z^{-1} \mathbf{G}(\mathbf{I} - z^{-1} \mathbf{A}_1)^{-1} \mathbf{B}_1 \mathbf{F}(z)$$

从而, 传递函数

$$\mathbf{H}(z) = z^{-1} \mathbf{G}(\mathbf{I} - z^{-1} \mathbf{A}_1)^{-1} \mathbf{B}_1 \quad (5.7-22)$$

由于

$$(\mathbf{I} - z^{-1} \mathbf{A}_1)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} (z^{-1} \mathbf{A}_1)^k = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{A}_1^k z^{-k}$$

则式(5.7-22)写成

$$\mathbf{H}(z) = z^{-1} \mathbf{G} \sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{A}_1^k z^{-k} \mathbf{B}_1 = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{G} \mathbf{A}_1^k \mathbf{B}_1 z^{-k-1} = \sum_{k=1}^{\infty} \mathbf{G} \mathbf{A}_1^{k-1} \mathbf{B}_1 z^{-k} \quad (5.7-23)$$

与式(5.7-19)比较

$$\mathbf{h}(0) = \mathbf{0} \quad (5.7-24a)$$

$$\mathbf{h}(k) = \mathbf{G} \mathbf{A}_1^{k-1} \mathbf{B}_1 \quad (5.7-24b)$$

式(5.7-24)即是 ERA 的数学模型。ERA 的目的是由 $\mathbf{h}(k)$ 构造系统的最小实现 $[\mathbf{A}_1, \mathbf{B}_1, \mathbf{G}]$ 。

5.7.3 系统最小实现 $[\mathbf{A}_1, \mathbf{B}_1, \mathbf{G}]$

设已测得脉冲响应矩阵 $\mathbf{h}(k)$, $M \times L$ 阶。以此构造广义 Hankel 矩阵

$$\mathbf{H}(k-1) = \begin{bmatrix} \mathbf{h}(k) & \mathbf{h}(k+t_1) & \mathbf{h}(k+t_2) & \cdots & \mathbf{h}(k+t_{\beta-1}) \\ \mathbf{h}(s_1+k) & \mathbf{h}(s_1+k+t_1) & \mathbf{h}(s_1+k+t_2) & \cdots & \mathbf{h}(s_1+k+t_{\beta-1}) \\ \mathbf{h}(s_2+k) & \mathbf{h}(s_2+k+t_1) & \mathbf{h}(s_2+k+t_2) & \cdots & \mathbf{h}(s_2+k+t_{\beta-1}) \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \mathbf{h}(s_{\alpha-1}+k) & \mathbf{h}(s_{\alpha-1}+k+t_1) & \mathbf{h}(s_{\alpha-1}+k+t_2) & \cdots & \mathbf{h}(s_{\alpha-1}+k+t_{\beta-1}) \end{bmatrix} \quad (5.7-25)$$

式中 $t_i (i=1, 2, \dots, \alpha-1)$ 、 $s_i (i=1, 2, \dots, \beta-1)$ 为任意整数, 矩阵中每一元素均为 $M \times L$ 阶矩阵, 因而矩阵 $\mathbf{H}(k-1)$ 的阶数为 $\alpha M \times \beta L$ 。理论上, $\mathbf{H}(k-1)$ 的秩不变, 且正好为系统的阶

次。由于噪声污染, $H(k-1)$ 必然有秩亏损, 因此当 α, β 增大到一定程度后, 秩才趋于不变。参数 t_i, s_i, α, β 选择的标准是能获得这个不变秩, 且使 $H(k-1)$ 阶数最小。通常选择 $t_i = s_i = i$, 此时, 式(5.7-25)成为

$$H(k-1) = \begin{bmatrix} h(k) & h(k+1) & h(k+2) & \cdots & h(k+\beta-1) \\ h(k+1) & h(k+2) & h(k+3) & \cdots & h(k+\beta) \\ h(k+2) & h(k+3) & h(k+4) & \cdots & h(k+\beta+1) \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ h(k+\alpha-1) & h(k+\alpha) & h(k+\alpha+1) & \cdots & h(k+\alpha+\beta-2) \end{bmatrix} \quad (5.7-26)$$

将式(5.7-24b)代入上式, 整理得

$$H(k-1) = PA_1^{k-1}Q \quad (5.7-27)$$

式中能观、能控矩阵 P, Q 为

$$P = \begin{bmatrix} G \\ GA_1 \\ \vdots \\ GA_1^{\alpha-1} \end{bmatrix} \quad (\alpha M \times 2n \text{ 阶}) \quad (5.7-28)$$

$$Q = [B_1 \quad A_1 B_1 \quad \cdots \quad A_1^{\beta-1} B_1] \quad (2n \times \beta L \text{ 阶}) \quad (5.7-29)$$

α, β 分别称为能观、能控指数, 且有

$$\frac{2n}{M} \leq \alpha \leq 2n, \quad \frac{2n}{L} \leq \beta \leq 2n \quad (5.7-30)$$

式(5.7-27)中, 令 $k=1$, 有

$$H(0) = PQ \quad (5.7-31)$$

显然也有

$$H(k) = PA_1^k Q \quad (5.7-32)$$

对 $H(0)$ 做奇异值分解

$$H(0) = U \Sigma V^T \quad (5.7-33)$$

式中 U 为 $\alpha M \times 2n$ 阶矩阵, V 为 $\beta L \times 2n$ 阶矩阵, 且均为 $2n$ 阶列正交矩阵, 即

$$U^T U = I, V^T V = I \quad (5.7-34)$$

Σ 为 $2n \times 2n$ 阶对角阵, 即

$$\Sigma = \text{diag}[\sigma_1, \sigma_2, \cdots, \sigma_{2n}] \quad (5.7-35)$$

$\sigma_i^2 (i=1, 2, \cdots, 2n)$ 为 $H^T(0)H(0)$ 的非零特征值, σ_i 为 σ_i^2 的正平方根即 $H(0)$ 的奇异值; U 为 $H(0)H^T(0)$ 对应非零特征值的特征向量按列组成的矩阵; V 为 $H^T(0)H(0)$ 对应非零特征值的特征向量按列组成的矩阵。上述特征值均按降序排列。

引入 $\beta L \times \alpha M$ 阶矩阵 H^* , 且使

$$QH^*P = I \quad (5.7-36)$$

考虑式(5.7-31)、式(5.7-36), 有下述关系

$$H(0)H^*H(0) = \underbrace{PQ \quad H^* \quad PQ}_I = PQ = H(0) \quad (5.7-37)$$

可见, $H^\#$ 是 $H^-(0)$ (一种广义逆)。

若再考虑式(5.7-33), 上式又可写成

$$H(0)H^\#H(0) = \underbrace{U\Sigma V^1 H^\# U\Sigma V^T}_I = H(0) = U\Sigma V^T$$

从而有

$$V^T H^\# U\Sigma = I \quad (2n \times 2n \text{ 阶}) \quad (5.7-38)$$

考虑式(5.7-34), 由上式解得

$$H^\# = V\Sigma^{-1}U^T \quad (5.7-39)$$

设

$$\left. \begin{aligned} E_M^T &= [I_M \quad 0_M \quad \cdots \quad 0_M] \quad (M \times \alpha M \text{ 阶}) \\ E_L^T &= [I_L \quad 0_L \quad \cdots \quad 0_L] \quad (L \times \beta L \text{ 阶}) \end{aligned} \right\} \quad (5.7-40)$$

式中, $I_M, 0_M$ 分别为 M 阶单位阵和零阵; $I_L, 0_L$ 分别为 L 阶单位阵和零阵。由式(5.7-26)可得

$$h(k+1) = E_M^T H(k) E_L \quad (5.7-41)$$

将式(5.7-32)代入上式, 得

$$h(k+1) = E_M^T P A_1^k Q E_L \quad (5.7-42)$$

在 A_1^k 两边各插入式(5.7-36)形式的单位阵并注意式(5.7-31), 有

$$\begin{aligned} h(k+1) &= E_M^T \overbrace{P Q}^I \overbrace{H^\#}^I P A_1^k Q \overbrace{H^\#}^I \overbrace{P Q}^I E_L \\ &= E_M^T H(0) \overbrace{H^\#}^I \overbrace{P A_1^k Q H^\#}^I H(0) E_L \end{aligned} \quad (5.7-43)$$

仅考虑上式中画线部分, 注意式(5.7-36), 有

$$\begin{aligned} H^\# P A_1^k Q &= \underbrace{H^\# P A_1 Q \cdot H^\# P A_1 Q \cdots H^\# P A_1 Q}_{k \text{ 组}} \\ &= (H^\# P A_1 Q)^k = (H^\# H(1))^k \end{aligned} \quad (5.7-44)$$

将式(5.7-39)代入上式, 有

$$\begin{aligned} H^\# P A_1^k Q &= (V\Sigma^{-1}U^T H(1))^k \\ &= V(\Sigma^{-1}U^T H(1)V)^{k-1} \Sigma^{-1}U^T H(1) \end{aligned} \quad (5.7-45)$$

代入式(5.7-43), 考虑式(5.7-39)、式(5.7-33)及式(5.7-34)并注意 Σ 为对角阵, 有

$$\begin{aligned} h(k+1) &= E_M^T H(0) \underbrace{V(\Sigma^{-1}U^T H(1)V)^{k-1} \Sigma^{-1}U^T H(1)}_{\text{式(5.7-45)}} \underbrace{V\Sigma^{-1}U^T H(0)E_L}_{H^\#} \\ &= E_M^T H(0) V(\Sigma^{-1}U^T H(1)V)^k \Sigma^{-1}U^T H(0) E_L \\ &= E_M^T U\Sigma V^T V(\Sigma^{-1}U^T H(1)V)^k \Sigma^{-1}U^T U\Sigma V^T E_L \\ &= E_M^T U\Sigma(\Sigma^{-1}U^T H(1)V)^k V^T E_L \\ &= \underbrace{E_M^T U\Sigma^{\frac{1}{2}}}_G \underbrace{(\Sigma^{-\frac{1}{2}}U^T H(1)V\Sigma^{-\frac{1}{2}})^k}_{A_1} \underbrace{\Sigma^{\frac{1}{2}}V^T E_L}_{B_1} \end{aligned} \quad (5.7-46)$$

与式(5.7-24b)比较,有

$$\left. \begin{aligned} A_1 &= \Sigma^{-\frac{1}{2}} U^T H(1) V \Sigma^{\frac{1}{2}} \\ B_1 &= \Sigma^{\frac{1}{2}} V^T E_L \\ G &= E_M^T U \Sigma^{\frac{1}{2}} \end{aligned} \right\} \quad (5.7-47)$$

因为 A_1 的阶数为 $2n$, 故由上式确定的 $[A_1, B_1, G]$ 为系统的最小实现。式(5.7-47)是 ERA 的基本公式。

从逼近理论来看, 在所有秩为 $2n$ 的矩阵组成的子空间中, $U \Sigma V^T$ 是 $H(0)$ 的最佳逼近。从信号处理角度看, 用 $U \Sigma V^T$ 代替 $H(0)$, 相当于对数据做了一次维纳滤波, 被滤掉的是对应零奇异值的、与输入输出无关的随机噪声。所以状态方程无需再为此类噪声提供出口, 亦即无需扩阶。

顺便指出, 由式(5.7-46), 系统的最小实现也可取为

$$\left. \begin{aligned} A_1 &= \Sigma^{-1} U^T H(1) V \\ B_1 &= V^T E_L \\ G &= E_M^T U \Sigma \end{aligned} \right\} \quad (5.7-48)$$

5.7.4 模态参数

设矩阵 A 的特征值矩阵(谱矩阵)为 Λ , 特征矢量矩阵为 Ψ' , 均为 $2n \times 2n$ 阶, 则有

$$\Psi'^{-1} A \Psi' = \Lambda$$

或

$$A = \Psi' \Lambda \Psi'^{-1} \quad (5.7-49)$$

代入式(5.7-11), 由指数矩阵的性质有

$$A_1 = e^{\Psi' \Lambda \Psi'^{-1} \Delta t} = \Psi' e^{\Lambda \Delta t} \Psi'^{-1}$$

即

$$\Psi'^{-1} A_1 \Psi' = e^{\Lambda \Delta t} \quad (5.7-50)$$

从而知 A_1 的特征矢量与 A 相同, 特征值矩阵为

$$Z = e^{\Lambda \Delta t} \quad (5.7-51)$$

式中 Z 的对角元素为

$$z_i = e^{\lambda_i \Delta t} \quad (i=1, 2, \dots, 2n) \quad (5.7-52)$$

由以上分析可知 ERA 模态参数识别的步骤是:

- ①由求解 A_1 的特征值问题得特征值矩阵 Z 和特征矢量矩阵 Ψ' ;
- ②由式(5.7-51)或式(5.7-52)求 A 的特征值

$$\lambda_i = \frac{1}{\Delta t} \ln z_i \quad (i=1, 2, \dots, 2n) \quad (5.7-53)$$

- ③由观测方程式(5.7-5)可知系统的模态矩阵(振型矩阵)

$$\Psi = G \Psi' \quad (5.7-54)$$

$M \times 2n$ 阶, 其前 n 列即 n 个模态振型。

讨论几点如下:

①以上步骤中 A_1 、 G 由式(5.7-47)或式(5.7-48)确定;

②为提高识别精度,可采用 $H(0)$ 的正、负时移 $H(k)$ 、 $H(-k)$ 确定矩阵 A_1 , 即

$$A_1 = \frac{1}{2} (\Sigma^{-\frac{1}{2}} U^T H(k) V \Sigma^{-\frac{1}{2}} + \Sigma^{-\frac{1}{2}} U^T H(-k) V \Sigma^{-\frac{1}{2}}) \quad (5.7-55)$$

以此为基础进行参数识别;

③取变换矩阵 $T = \Psi'$, 则

$$[\Psi'^{-1} A_1 \Psi', \Psi'^{-1} B_1, G \Psi'] = [Z, B_0, \Psi] \quad (5.7-56)$$

式中 Z 为 A_1 的特征值矩阵, Ψ 为模态矩阵, 而

$$B_0 = \Psi'^{-1} B_1 \quad (2n \times L \text{ 阶}) \quad (5.7-57)$$

为初始模态幅值矩阵, 则 $[Z, B_0, \Psi]$ 亦为系统的一个最小实现。

5.7.5 非随机噪声和非线性因素的影响

由于非随机噪声和结构非线性因素的影响, 对 $H(0)$ 进行奇异值分解时有时存在定阶困难。如果奇异值按从大到小排列时有明显的突然变小且小到一定程度的情况, 则舍掉后面的奇异值, 突变处即系统的阶次。如果无明显突变分界线, 则无法直观定阶。Juang J N 和 Pappa R S 引入模态幅值相干系数 MAC 和模态相位共线性 MPC 来区分有效模态和噪声模态。

1. 模态幅值相干系数

将式(5.7-57)写成

$$B_0 = \Psi'^{-1} \Sigma^{\frac{1}{2}} V^T E_L = [b_1 \quad b_2 \quad \cdots \quad b_{2n}]^H \quad (5.7-58)$$

式中 H 表示转置共轭, b_i 为 L 阶列阵。下列行阵

$$\bar{q}_i^H = [b_i^H \quad e^{\Delta \alpha_i} b_i^H \quad \cdots \quad e^{(\beta-1)\Delta \alpha_i} b_i^H] \quad (\beta L \text{ 阶}) \quad (5.7-59)$$

表示对应第 i 阶模态运动的理想模态幅值时间序列。

定义列矢量 q_i 如下:

$$\Psi'^{-1} \Sigma^{\frac{1}{2}} V^T = [q_1 \quad q_2 \quad \cdots \quad q_{2n}]^H \quad (5.7-60)$$

βL 阶行阵 q_i^H 表示对应第 i 阶模态运动的实测模态幅值时间序列。定义模态幅值相干系数

$$\gamma_i = \frac{|\bar{q}_i^H q_i|}{\|\bar{q}_i\| \|q_i\|} \quad (i=1, 2, \cdots, 2n) \quad (5.7-61)$$

γ_i 的范围为 $0 \leq \gamma_i \leq 1$ 。当第 i 阶模态为系统模态时, $\gamma_i \rightarrow 1$; 当为噪声模态时, $\gamma_i \rightarrow 0$ 。

2. 模态相位共线性

对小阻尼系统, 定义模态相位共线性表示模态振型实虚部之间的关系。

将式(5.7-54)写成

$$\Psi = [\psi_1 \quad \psi_2 \quad \cdots \quad \psi_{2n}] \quad (5.7-62)$$

M 阶列阵 $\psi_i (i=1, 2, \cdots, 2n)$ 表示测得的模态振型。定义 M 阶列阵

$$\mathbf{1} = [1 \quad 1 \quad \cdots \quad 1]^T \quad (5.7-63)$$

计算下述各量:

$$\bar{\psi}_i = \frac{\psi_i^T \mathbf{1}}{M} \quad (5.7-64)$$

$$\Delta \psi_i = \psi_i - \bar{\psi}_i \mathbf{1} \quad (5.7-65)$$

$$\phi_{rr} = \|\operatorname{Re}\Delta\psi_i\|^2 \quad (5.7-66)$$

$$\phi_{rr} = (\operatorname{Re}\Delta\psi_i)^T (\operatorname{Im}\Delta\psi_i) \quad (5.7-67)$$

$$\phi_{ii} = \|\operatorname{Im}\Delta\psi_i\|^2 \quad (5.7-68)$$

$$e = \frac{\phi_{ii} - \phi_{rr}}{2\phi_{rr}} \quad (5.7-69)$$

$$\theta = \arctan[e + \operatorname{sgn}(e)\sqrt{1+e^2}] \quad (5.7-70)$$

对应第 i 阶模态的模态相位共线性定义为

$$\mu_i = \frac{\phi_{rr} + \phi_{rr} \frac{2(e^2 + 1)\sin^2\theta - 1}{e}}{\phi_{rr} + \phi_{ii}} \quad (i=1, 2, \dots, 2n) \quad (5.7-71)$$

μ_i 的范围为 $0 \leq \mu_i \leq 1$ 。当 $\mu_i \rightarrow 1$, 表示第 i 阶模态为系统模态(小阻尼); 当 $\mu_i \rightarrow 0$, 表示该阶模态为噪声模态或复模态(大阻尼)。事实上, MPC 反映了识别模态振型距离 0 或 180° 的相位偏差。

5.7.6 ERA 与 ITD 法的关系

1. ITD 法

ITD 法的系统矩阵 A 由

$$D_{yx} = AD_{xy} \quad (5.3-58)$$

确定, 参考式(5.3-24)、式(5.3-28), D_{xy} 、 D_{yx} 可写成

$$D_{xy} = \begin{bmatrix} X(k) \\ X(k+1) \end{bmatrix} \quad (2n \times 2n \text{ 阶}) \quad (5.7-72)$$

$$D_{yx} = \begin{bmatrix} X(k+1) \\ X(k+2) \end{bmatrix} \quad (2n \times 2n \text{ 阶}) \quad (5.7-73)$$

式中元素 $X(k)$ 、 $X(k+1)$ 、 $X(k+2)$ 均为 $n \times 2n$ 阶矩阵, 相当于式(5.3-8)、式(5.3-13)、式(5.3-20)表达的 \tilde{X} 、 \tilde{Y} 、 \tilde{Z} , 但延时 $\Delta\tau = \Delta t$, 起始采样点号为 k 。取自由响应 $x(k)$ 为脉冲响应 $h(k)$, 由式(5.3-58), 有

$$h(k+1) = Ah(k) \quad (5.7-74)$$

式中 $h(k+1)$ 和 $h(k)$ 均为 $2n$ 阶列阵。

2. ERA 法

在式(5.7-42)中 A_1^k 右端插入式(5.7-36)形式的单位阵并注意式(5.7-31), 有

$$h(k+1) = E_M^T P A_1^k \overbrace{QH^* PQ}^I E_L \quad (5.7-75)$$

$H(0)$

仿照式(5.7-44)的推导过程, 易知

$$P A_1^k Q H^* = (H(1)H^*)^k \quad (5.7-76)$$

则式(5.7-75)写成

$$h(k+1) = \underbrace{E_M^T}_{G} \underbrace{(H(1)H^*)^k}_{A_1} \underbrace{H(0)E_L}_{B_1} \quad (5.7-77)$$

从而

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{A}_1 &= \mathbf{H}(1)\mathbf{H}^* & (\alpha M \times \alpha M \text{ 阶}) \\ \mathbf{B}_1 &= \mathbf{H}(0)\mathbf{E}_L & (\alpha M \times L \text{ 阶}) \\ \mathbf{G} &= \mathbf{E}_M^T & (M \times \alpha M \text{ 阶}) \end{aligned} \right\} \quad (5.7-78)$$

为系统的一个实现。当 $M=2n, L=1$ 时, $\alpha=1$ (由式(5.7-30)), 则式(5.7-77)成为

$$\mathbf{h}(k+1) = \mathbf{GA}_1^k \mathbf{B}_1 = \mathbf{A}_1^k \mathbf{B}_1 = \mathbf{A}_1 \mathbf{h}(k) \quad (5.7-79)$$

此即 ITD 法的基本公式(5.7-74), \mathbf{A}_1 即 \mathbf{A} , $2n \times 2n$ 阶。

可见, 当为单点激励($L=1$)且测点数恰为系统阶次($M=2n$)时, ERA 即退化为 ITD 法。比较二种方法, 为了给噪声模态留有出口, ITD 法需增加测点数和采样点数, 从而导致式(5.7-74)中的 \mathbf{A} 矩阵阶数增大, 即 ITD 法中的系统矩阵 \mathbf{A} 不是最小实现, 增大了计算量和误差。

思考题

1. 时域法的响应模型与频域法有何不同? 两种方法有何优缺点?
2. 常有哪几种时域识别法? 每种方法用何种响应模型(何种响应信号)?
3. 随机减量法的基本思想如何?
4. 几种时域识别法中, 哪些为整体识别法? 哪些为局部识别法?
5. 使用 ITD 法求出特征值后, 由无量纲算法估算模态参数有何好处?
6. 在 ITD 法中, 当测点不足时如何处理? 如何提高识别精度? 噪声模态如何判断? 有哪几种方法?
7. 最小二乘复指数法中, 为什么要构造 Prony 多项式? 如何改善自回归系数 a 和留数 R' 的识别精度?
8. 为什么 ARMA 模型与强迫振动方程等价? 传递函数与 ARMA 模型有何关系?
9. Z 变换如何定义?
10. 什么是 PRCE 法? 与 LSCE 法的关系如何?
11. 什么叫系统的最小实现?
12. ERA 法的基本思想是什么? 为什么说 ERA 法是最先进的识别方法之一?
13. ERA 法与 ITD 法有何关系?

第 6 章 模态分析在工程中的应用

6.1 引言

随着振动理论及其相关学科的发展,人们早已改变了仅仅依靠静强度理论进行结构设计的观念。许多结构是在外部激励或自身动力作用下处于运动状态的。这种运动或其主要成分往往是振动。如旋转机械的振动,空间飞行器的颤振,车辆、船舶等交通运输工具的振动,机床的振动,武器在发射状态下的振动等等。这些机械的设计、评估自然必须考虑动态特性。有些看起来是静态的问题,在结构设计时也必须考虑动态因素的影响。如海工结构设计,除考虑静态因素外,风载、浪载、地震载荷及自身动力都是必须涉及的因素;高层建筑也必须进行风载、地震载荷的影响预估;桥梁,特别是大跨度桥梁,除风载和地震载荷外,还必须考虑桥上车辆载荷的影响,过去和现在都发生过由于共振引起的桥梁倒塌事故;载有旋转机械的厂房,如电厂,特别是核电站的防护层和厂房,动态载荷往往是设计的主要考虑因素。还有一些结构,静强度或动强度并不是设计的主要标准,但却要求有良好的振动特性。如空调、洗衣机、微波炉等电器产品的设计不当会引发很大的噪声;音箱、乐器等要求有优良的发声效果。事实表明,振动特性分析在结构设计和评价中具有极其重要的位置。特别是随着现代工业的进步,许多产品朝着更大、更快、更轻和更安全可靠的方向发展,因此对动态特性的要求越来越高,振动分析愈显重要。

作为振动工程理论的一个重要分支,模态分析或实验模态分析为各种产品的结构设计和性能评估提供了一个强有力的工具,其可靠的实验结果往往作为产品性能评估的有效标准,而围绕其结果开展的各种动态设计方法更使模态分析成为结构设计的重要基础。特别是计算机技术和各种计算方法(如 FEM)的发展,为模态分析的应用创造了更加广阔的环境。

模态分析的应用可分为以下四类。

1. 模态分析在结构性能评价中的直接应用

根据模态分析的结果,即模态频率、模态振型、模态阻尼等模态参数,对被测结构进行直接的动态性能评估。对一般结构,要求各阶模态频率远离工作频率,或工作频率不落在某阶模态的半功率带宽内;对结构振动贡献较大的振型,应使其不影响结构正常工作为佳。这是模态分析的直接应用,已成为工程界的基本方法。

2. 模态分析在结构动态设计中的应用

以模态分析为基础的结构动态设计,是近年来振动工程界开展的最广泛的研究领域之一。众所周知,传统的结构设计,在考虑动态因素的结构修改时,是以经验和反复实测为主要手段。因为尽管依据模态分析结果和响应试验容易判断出初步结构的性能缺陷,但在结构修改问题上却往往茫然无所知,设计工程师只能依据经验和现有条件进行反复修改和实测,有时甚至将原设计完全推翻重新设计。这大大减缓了设计速度,设计质量也难以达到最优。为此,科技工

作者不断探索有依据的结构动态修改方法,以期达到优化设计的目的。

有限元法(FEM)和实验模态分析(EMA)为结构动态设计提供了两条最主要的途径。在围绕这两种基本方法所开展的结构动态设计研究工作中,人们提出了很多的方法。这些方法可归为以下六类:①载荷识别;②灵敏度分析;③物理参数修改;④物理参数识别;⑤再分析;⑥结构优化设计。它们分别从不同方面解决了结构动态设计中的部分问题,某几种方法的组合可做到结构的优化设计。

以上问题将在 6.3 节~6.9 节中讨论。

3. 模态分析在故障诊断和状态监测中的应用

利用模态分析得到的模态参数等结果进行故障判别,日益成为一种有效而实用的故障诊断和安全检验方法。如根据模态频率的变化判断裂纹的出现,根据振型的分析判断裂纹的位置,根据转子支撑系统阻尼的改变判断和预报转子的失稳,土木工程中依据模态频率的变化判断水泥桩中是否有裂纹和空隙等等。这一部分内容将在 6.10 节中做简单介绍。

4. 模态分析在声控中的应用

声音控制包括利用振动和抑制振动两个方面。抑制振动结构的幅射噪声,在很多问题中都很突出。模态分析为分析噪声产生的原因及治理措施提供了有效的方法。6.11 节将介绍这方面的实例。

事实上,模态分析在工程中的应用远不止以上列举的四类问题,科技工作者正在试图将模态分析的应用扩大到更广的范围。

6.2 模态分析在结构性能评价中的直接应用

6.2.1 BJ-3 型内燃机车车体模态试验分析

BJ-3 型内燃机车是我国内燃机车的主要车型之一。其车身长 15 m、宽 3 m、高 3 m,重约 20 t,为框架式、侧壁承载、全钢焊接结构。

机车运行过程中,由于存在着大功率柴油机、液力传动装置、空气压缩机、冷却风扇、传动轴等高频振源及道路因素等低频振源,车体的振动是不可避免的。为了保障和延长机车各种零部件的使用寿命,改善司机的工作环境,需要有效地减少车体的振动。下面介绍车体模态试验过程。

1. 车体动态特性的预估

在试验之前,运用 FEM 对车体进行模态计算,得到车体固有频率和振型,初步了解车体固有频率分布范围、模态密集程度、各阶振型的形态,为模态试验中激励方式、测点布置、采样频率等因素的确定提供了依据。

2. 模态分析的预试验

预试验的目的是进一步确定最佳试验方案。根据对车体动态特性的预估,在车体上选择 15 个测点,采用五种试验方案进行对比试验,其中考虑了单次锤击、随机激振、随机冲击激振、单点激振、分区激振及不同锤帽等条件。通过预试验,进一步了解了车体的频率范围,确定了最佳驱动点。同时,对结构的非线性影响、频响函数矩阵的对称性进行了检验。最后,确定采用国产 8401 型 5 t 力锤(橡胶锤帽)、随机冲击激励、分区测试的试验方案。

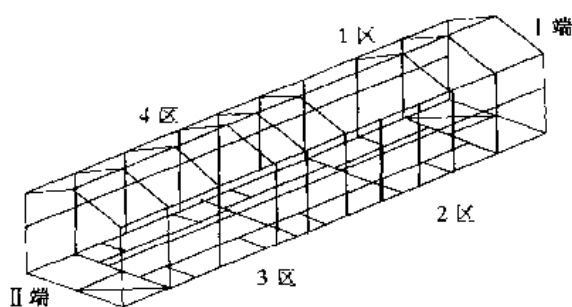


图 6.2-1 BJ-3 型内燃机车车体分区图

3. 动态测试

将车体支撑于假车台上,边界条件为弹性支撑。选取 120 个测点,分成四个区域,如图 6.2-1 所示。1、4 区为侧壁、司机室等,刚度较小,采用单点激振、逐点拾振的方式;2、3 区为车架,刚度较大,采用逐点激振、单点拾振的方式。选择驱动点时,考虑了刚度大、避开节点、接近区域几何中心等因素。用 B&K4321 三轴向加速度计和 B&K4384 加速度计测量车体加速度

响应,激励和响应信号经 B&K2635 电荷放大器送至 XR-20C TEAC 磁带记录仪,同时用示波器和电压表监测这些信号。

4. 数据后处理

用结构动态分析仪 HP5423A 分析处理磁带记录仪记录的测量信号,根据固有频率的密集程度,选择适当带宽,做出频响函数,然后进行曲线拟合,求出各区内频响函数,根据 4.9 节中介绍的分区模态综合法,识别出前 7 阶模态参数。在曲线拟合过程中,选择反节点处的频响函数来识别固有频率和模态阻尼,并综合考虑了虚频、实频、相频特性,且以相干函数来检验各种曲线的有效性。图 6.2-2 给出典型频响函数的幅频、虚频、相频和实频特性曲线及相干函数。

5. 模态试验结果及分析

表 6.2-1 给出所得前 7 阶模态的模态参数,图 6.2-3 给出对应的振型图。

表 6.2-1 BJ-3 型内燃机车车体前 7 阶模态参数

模 态	1	2	3	4	5	6	7
固有频率(Hz)	14.11	17.20	21.37	25.25	30.32	31.92	33.57
模态质量(Ns ² /m)	0.11×10^{-6}	0.93×10^{-7}	0.74×10^{-7}	0.63×10^{-7}	0.53×10^{-7}	0.49×10^{-7}	0.47×10^{-7}
模态刚度(N/m)	0.89×10^{-3}	0.11×10^{-2}	0.13×10^{-2}	0.16×10^{-2}	0.19×10^{-2}	0.20×10^{-2}	0.21×10^{-2}
模态阻尼(Ns/m)	0.37×10^{-5}	0.29×10^{-5}	0.34×10^{-5}	0.73×10^{-5}	0.42×10^{-5}	0.54×10^{-5}	0.45×10^{-5}

模态试验结果表明,机车车体在 35 Hz 以下存在着丰富的模态,特别是在 30~35 Hz 之间,模态较密集。从振型上看,第 2、4 阶模态对驾驶室影响较大,在修改结构时应予以注意。此外,I 端侧壁比 II 端振动大,可能是引起侧壁与驾驶室之间发生疲劳破坏的原因之一。

6.2.2 26 m²大型直线振动筛模态试验分析

国产某型号 26 m²大型直线振动筛长 7.5 m、宽 3.6 m,筛面有效面积 26 m²,单层筛体,由两台自同步电机带动两组偏心块驱动,用途为洗煤。筛体结构如图 6.2-4 所示。

振动筛属于振动机械,直接利用振动进行工作。与一般机械相比,振动环境更为恶劣,因此,对结构动态特性的要求也更加严格。比如,要求结构的固有频率必须远离工作频率,筛体刚体位移应远远大于弹性变形。否则,弹性变形增大,不仅会使结构容易产生疲劳断裂,还会使筛面上物料走料不均匀,甚至局部物料倒行,产生物料堆积。一般振动机械的物料筛送率是由生产线要求事先设计好的,驱动电机转速随之亦事先确定。因此,当工作频率与固有频率发生冲突时,一般应修改结构。

在初步有限元计算和以往资料的基础上,对筛体进行预实验,确定以下实验方案。结构采

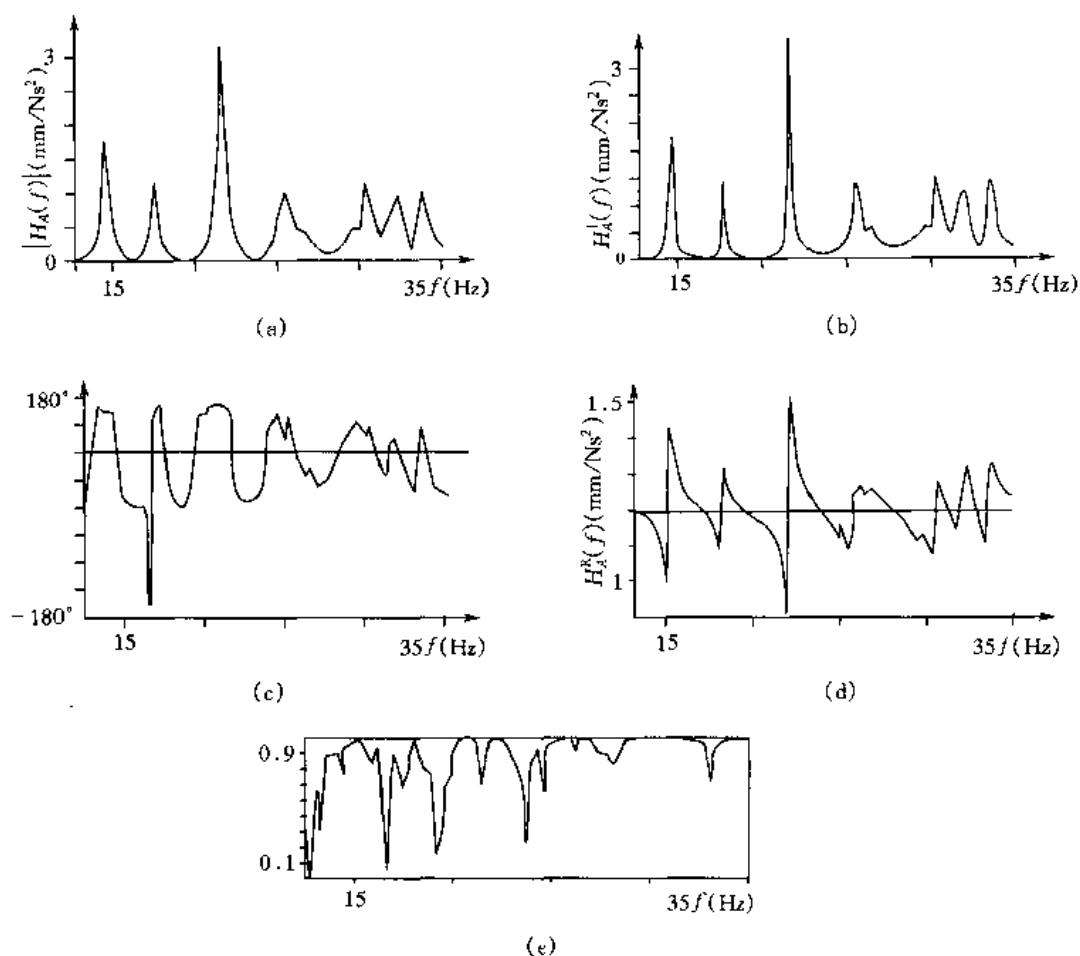


图 6.2-2 车体模态试验频响函数的特性曲线

(a)幅频曲线;(b)虚频曲线;(c)相频曲线;(d)实频曲线;(e)相干函数

用原装支撑,物料载荷状态为空载,激励为窄带随机激励、单点激励方式,激振器前置功率放大器采用恒流输出,共设 162 个测点,每点三个方向共 486 个自由度。实验获得 30 Hz 以内前 8 阶模态的模态参数,见表 6.2-2。模态振型见图 6.2-5。

表 6.2-2 振动筛前 8 阶模态参数

模态阶次	固有频率 (Hz)	阻尼比	模态质量 (Ns ² /m)	模态阻尼 (Ns/m)	模态刚度 (N/m)	缩比因子
1	3.000	4.466%	1.00	1.685	356.0	18.850
2	3.875	0.852%	1.00	0.415	592.8	24.347
3	4.000	3.726%	1.00	1.874	632.5	25.133
4	12.125	1.026%	1.00	1.563	5 805.0	76.284
5	15.375	0.734%	1.00	1.419	9 333.0	96.604
6	17.500	0.646%	1.00	1.420	12 091.0	109.96
7	22.625	0.555%	1.00	1.579	20 209.0	142.16
8	27.125	0.280%	1.00	0.955	29 047.0	170.43

实验结果表明,在工作频率 16.5 Hz 附近存在 12.125~22.625 Hz 四阶模态,特别是

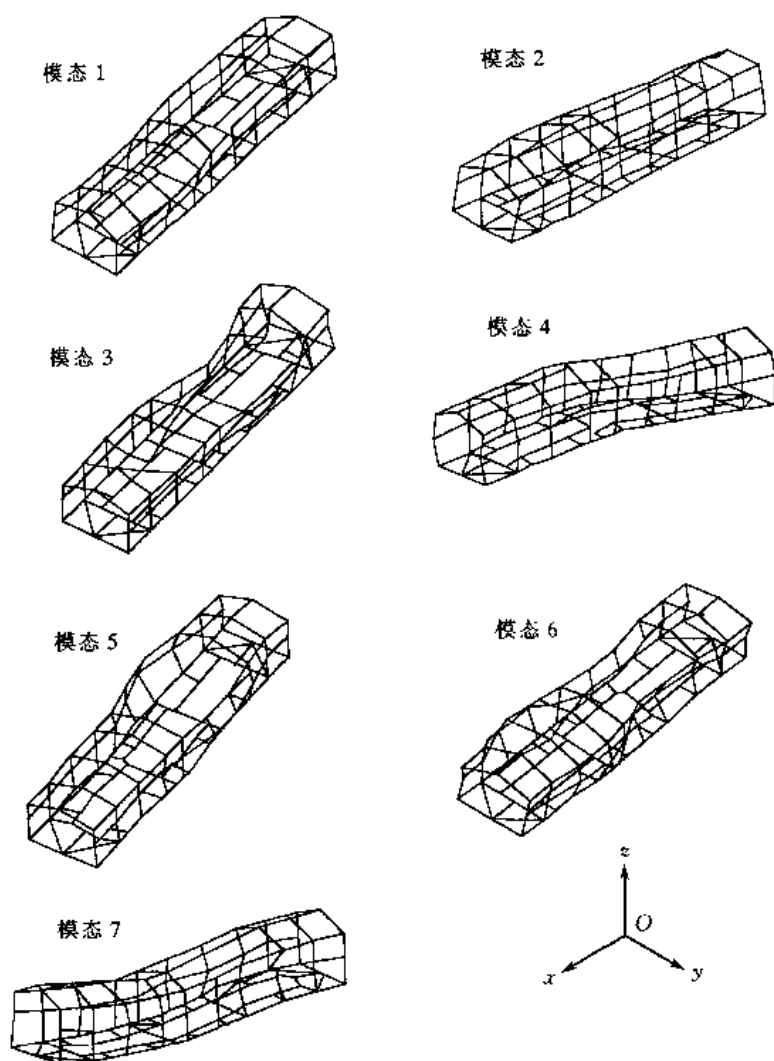


图 6.2-3 BJ-3 型内燃机车车体前 7 阶振型

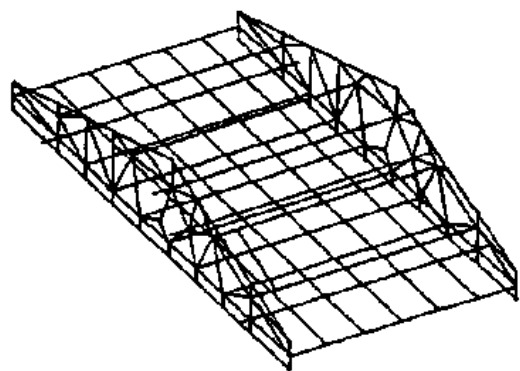


图 6.2-4 振动筛筛体结构

15.375 Hz 和 17.500 Hz 两个固有频率, 距离工频较近。进一步计算该两阶模态的半功率带宽为: 15.26~15.49 Hz 和 17.39~17.61 Hz。由于阻尼比较小, 工频 16.5 Hz 并没有落在这两个半功率带宽之内。然而, 距离却非常近, 分别为 1.01 Hz 和 0.89 Hz。对振动机械来说, 这样的频率范围是不允许的。一方面, 在负载(有物料)情况下, 系统固有频率会略有下降, 17.5 Hz 很容易接近工频 16.5 Hz; 另一方面, 由于工作环境的变化, 激振力频率 16.5 Hz 也会上下波动, 接近 15.375 Hz 和 17.5 Hz 中的一个。

仔细分析 15.375 Hz 和 17.5 Hz 对应的振型模态 5 和模态 6。模态 5 为绕 y 轴的扭转振型。该阶振型会使筛面四个角点处弹性变形增大, 物料运动速度发生改变, 导致走料不均匀。模态 6 为筛体在 xOy 平面内的一阶弯曲振动, 同时两侧板及连接梁产生较大弯曲变形。该阶

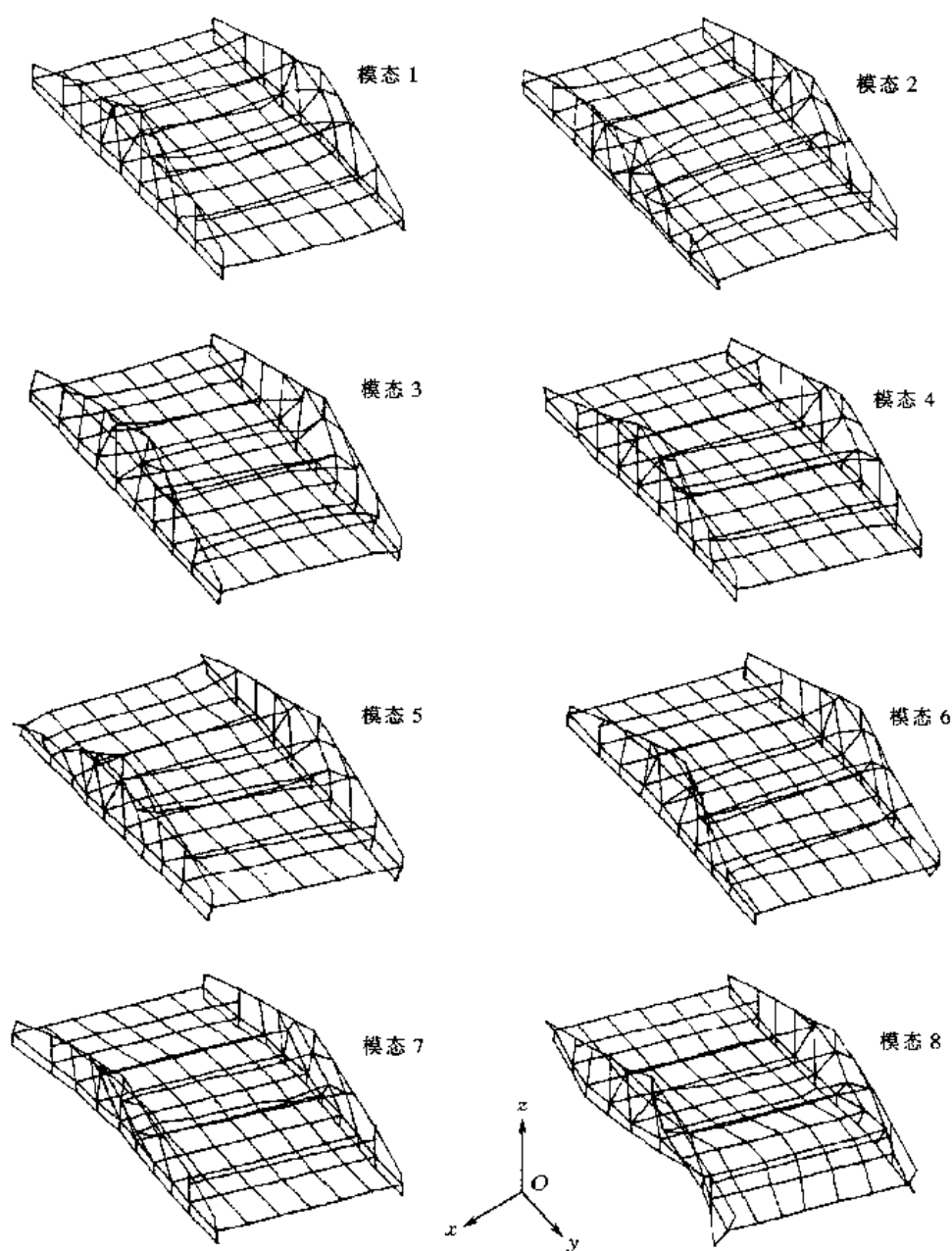


图 6.2-5 振动筛前 8 阶振型图

模态会导致两侧板及连接梁的疲劳破坏。实践和计算表明,这些部位是薄弱环节。

6.2.3 二滩水电站拱坝模型模态试验分析

二滩拱坝为变半径、变中心角抛物线型双曲拱坝,坝顶长度 778.87 m,最大坝高 240 m,底宽 55.7 m,顶宽 11 m,厚高比 0.229,矢跨比 0.232,属薄拱坝结构。大坝坝身设有 7 个 $11.5 \times 12 \text{ m}^2$ 表孔和 6 个 $6 \times 5 \text{ m}^2$ 中孔,常年泄洪水量 $13\,180 \text{ m}^3/\text{s}$,最大宣泄校核流量 $16\,300 \text{ m}^3/\text{s}$,最大泄洪功率 27 000 MW,在国内外已建成的高水头、大流量、采用水垫塘消能的大型拱坝工程中居首位。

诱发坝体振动的动载荷有三部分:①挑跌流水舌冲击下游河床产生的脉动压力;②泄流引

起的水垫塘波浪对坝体直接冲击的脉动压力;③表中孔泄流壁面上的脉动压力。设计大坝时,除考虑各种静态因素外,还必须考虑这些动态因素的影响。为此,必须对大坝动态特性进行研究,其中,大坝固有振动特性为研究的重要问题之一。

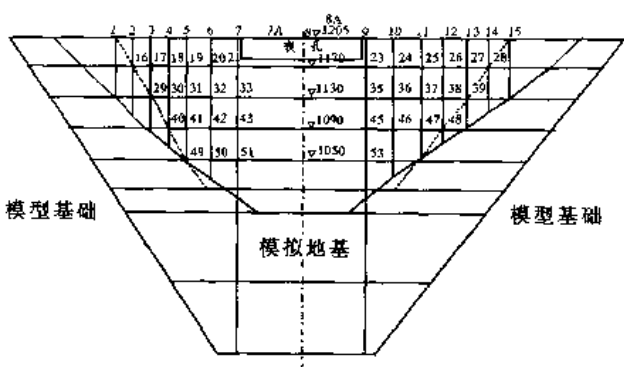


图 6.2-6 大坝模型及测点布置情况

按照相似定律,采用加重橡胶制作大坝 1:200 实验模型。通过预试验,确定采用窄带随机激励、单点激励逐点拾振的实验方案。由于坝型为薄拱结构,故只在模型下游面设置测点,共 53 个,如图 6.2-6 所示。为了方便,测点物理坐标采用球形坐标。实验分为空库和满库两种工况,通过模态分析各得到 10 阶有效模态。考虑大坝动载荷的频率范围(模型 30 Hz 以下,原型 2.1 Hz 以下),

这里只给出前 5 阶模态的模态参数。表 6.2-3 给出满库工况下大坝前 5 阶模态频率和阻尼比,图 6.2-7 为前 4 阶振型。表 6.2-4 还给出空库和满库工况下模态参数的比较结果。

表 6.2-3 满库工况下大坝前 5 阶模态参数

模 态	固 有 频 率 (Hz)		阻 尼 比	振型形式
	模 型	折合为原型		
1	15.625	1.105	7.708%	反对称
2	23.047	1.630	9.276%	正对称
3	26.562	1.878	5.558%	正对称
4	34.375	2.437	7.140%	正对称
5	43.359	3.066	9.299%	反对称

表 6.2-4 空库和满库两种工况下大坝固有频率比较*

模 态	空 库 (Hz)		满 库 (Hz)		频率下移
	模 型	原 型	模 型	原 型	
1	18.375	1.299	15.625	1.105	14.9%
2	30.250	2.139	26.250	1.856	13.2%
3	39.125	2.767	34.375	2.431	12.1%

* 该表系以原点(20号)频响函数估计出的值,与表 6.2-3 给出的结果略有不同。

实验结果表明,在动载荷频率范围内,影响大坝振动的模态主要有 4 阶(1~4 阶),且以径向振动为主。满库与空库工况下固有频率平均下降 13.5%,说明水对大坝固有特性影响较大。模态实验结果为进一步研究水流诱发坝体振动规律提供了有效依据。

6.3 模态分析在结构动态设计中的应用综述

有限元法(FEM)和实验模态分析(EMA)是结构动态设计的基本方法。围绕这两种基本方法所开展的研究工作内容十分丰富。应用这些成果,大大提高了产品设计性能,缩短了设计

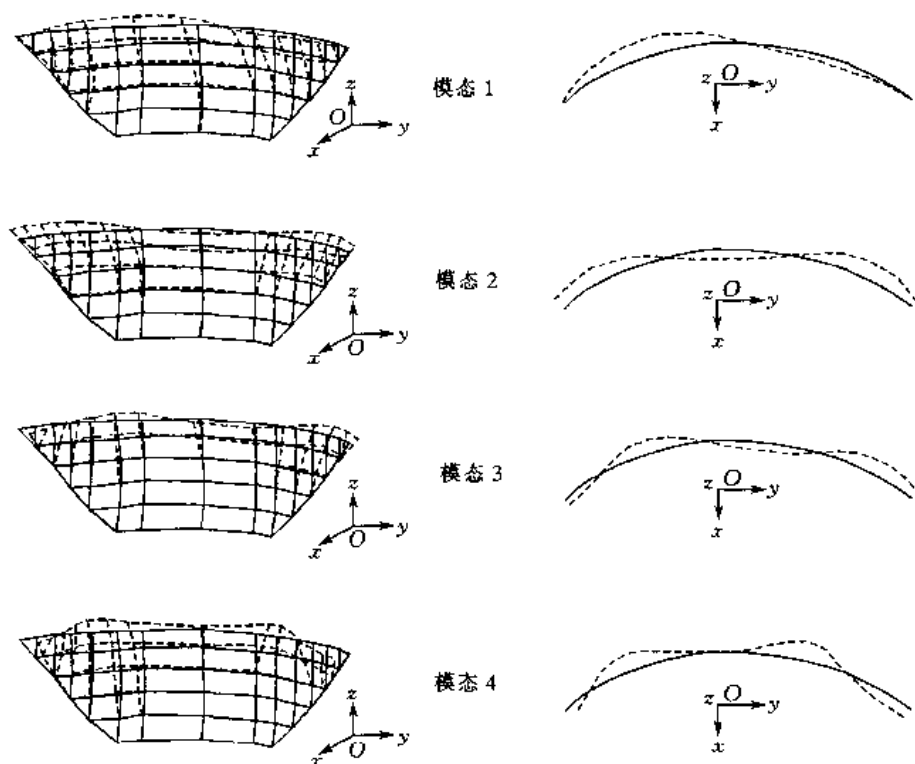


图 6.2-7 大坝前 4 阶振型

周期。产品结构动态设计一般方法如下。

1. 产品结构初步设计

按照设计任务要求,从产品结构原理出发进行初步设计,绘制初步设计结构图。在初步设计中一般都考虑静强度和静刚度要求。

2. 应用 FEM 对初步设计结果进行动态性能校核和修改

建立结构有限元模型,首先求解特征值问题,得到结构的固有频率 ω_0 和固有振型 ϕ_i ,检验这些模态参数是否符合模态参数模型准则,如固有频率是否远离外部激励频率。如不满足,通过特征灵敏度分析寻找拟修改质量阵 ΔM 和刚度阵 ΔK ,由再分析的方法或重新求解特征值问题,得到修改后的固有频率和振型,直到满足要求。

其次,根据理论计算或经验预估结构载荷,并由经验假设系统的阻尼,按上面得到的有限元模型计算系统的动态响应,包括位移、速度、加速度、变形、应力等,检验是否满足响应准则。如不满足,通过响应灵敏度分析修改有限元模型,得到修正质量阵 ΔM 和修正刚度阵 ΔK ,重新计算结构响应,直到满足要求。一般来讲同时还要校核模态参数是否满足要求。此时可制造样机或实验模型。

3. 实验模态分析

对样机或模型进行模态实验,得到实验模型参数 ω_i 、 ψ_i 、 ζ_i (η_i)。一般来讲,这些参数或由之识别出的固有参数 ω_{0i} 、 ϕ_i 与 FEM 结果存在误差。要检验实验模态参数是否满足模态模型准则。若不满足,通过特征灵敏度分析和再分析估计修改后结构模态参数,直至满足要求。

4. 结构动态修改

由满足要求的模态参数可继续开展以下工作:①物理参数修改,结合实验模态结果对

FEM 得到的质量阵、刚度阵求修改质量阵 ΔM 和修改刚度阵 ΔK , 得到修改后的 M 、 K ; ②物理参数识别。直接求解广义逆特征值问题, 求得 M 、 K 、 C ; ③载荷识别, 根据实验模态参数和响应要求估算系统的实际振动环境。

在上述三项工作的基础上通过 FEM 计算系统响应, 或修改样机或模型后实测系统响应, 检验是否满足响应准则。如不满足, 需通过响应灵敏度分析修改结构和再分析估算模态参数和响应, 直至满足要求。

5. 结构优化设计

在上述结构动态修改工作中, 一般只能得到物理参数的修改量 ΔM 、 ΔK 和 ΔC 。若以结构参数(尺寸、形状、材料性质等)为修改参数, 可直接得到满足动态要求的修改结构形式。一般来说, 这一步比前面工作难度更大, 但更加有效。

6. 生产正式产品

上述结构动态设计过程可概括为图 6.3-1, 简图为图 6.3-2。

人们提出的结构动态设计方法繁多, 但基于 FEM 和 EMA 的关键技术不外乎图 6.3-2 中的六种, 即载荷识别、灵敏度分析、物理参数修改、物理参数识别、再分析和结构优化设计。以下几节将分别介绍这六种关键技术中的典型方法, 并给以适当实例。

6.4 载荷识别

载荷识别又称环境模拟, 是另一类振动反问题。在计算或实测系统动态响应时, 需要知道系统承受的外部载荷。外部载荷一般可通过理论计算或实测得到, 然而, 有时却难以实现。比如爆炸冲击力、空气对直升机螺旋桨的作用力、波浪载荷、冰载荷、风载荷、某些机器的运转载荷等等。这时可由模态试验结果和响应来估算载荷。

载荷识别过程一般是这样的。首先测得系统的频响函数和模态参数, 然后测量系统在实际载荷作用下的响应, 或由响应准则预先给出响应要求, 以此识别对应响应的外载荷。

载荷识别方法分频域法和时域法两类。频域法由响应谱识别激励谱, 时域法由响应时间历程识别激励时间历程。下面介绍这两类方法中的几种典型方法。

6.4.1 频响函数矩阵求逆法

设实测获得的频响函数矩阵 $H(\omega)$ 为方阵, 且已知位移响应谱列阵 $X(\omega)$, 在式(1.6-20)中令 $s = j\omega$, 有常用关系式

$$X(\omega) = H(\omega)F(\omega) \quad (6.4-1)$$

易得载荷谱列阵

$$F(\omega) = H^{-1}(\omega)X(\omega) \quad (6.4-2)$$

若获得的 $H(\omega)$ 不是方阵, 而是 $M \times P$ 阶矩阵, M 为响应点数, P 为激励点数, 一般 $M > P$, 载荷谱列阵由广义逆求出

$$F(\omega) = [H^H(\omega)H(\omega)]^{-1}H^H(\omega)X(\omega) \quad (6.4-3)$$

如果响应为平稳随机过程, 则应用谱密度函数 $G_{xx}(\omega)$ 表示更为方便。设各点载荷互不相关, 由

$$G_{xx}(\omega) = H(\omega)\text{diag}[G_{ff}(\omega)]H^H(\omega) \quad (1.7-35)$$

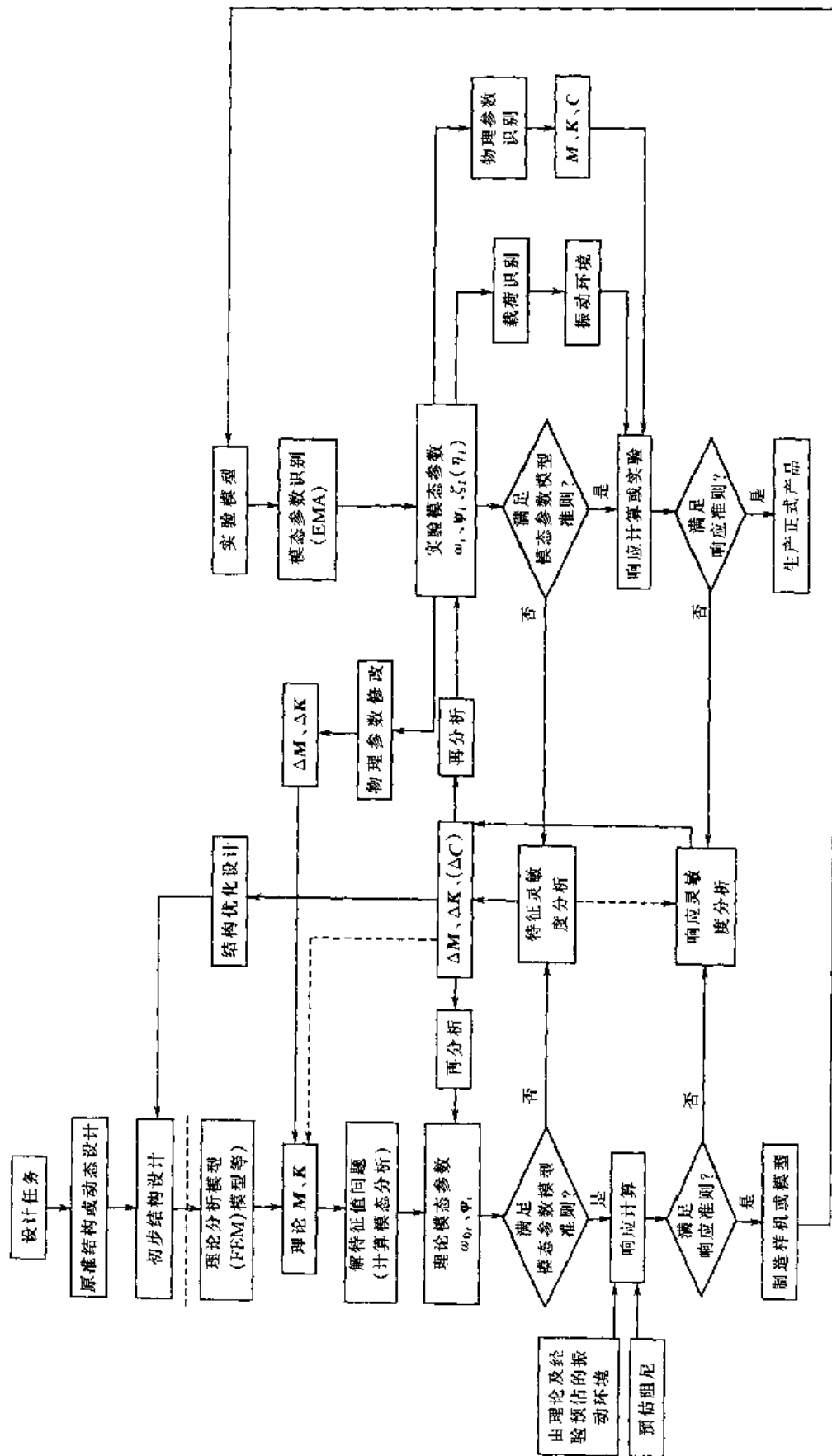


图 6.3-1 结构动态设计框图

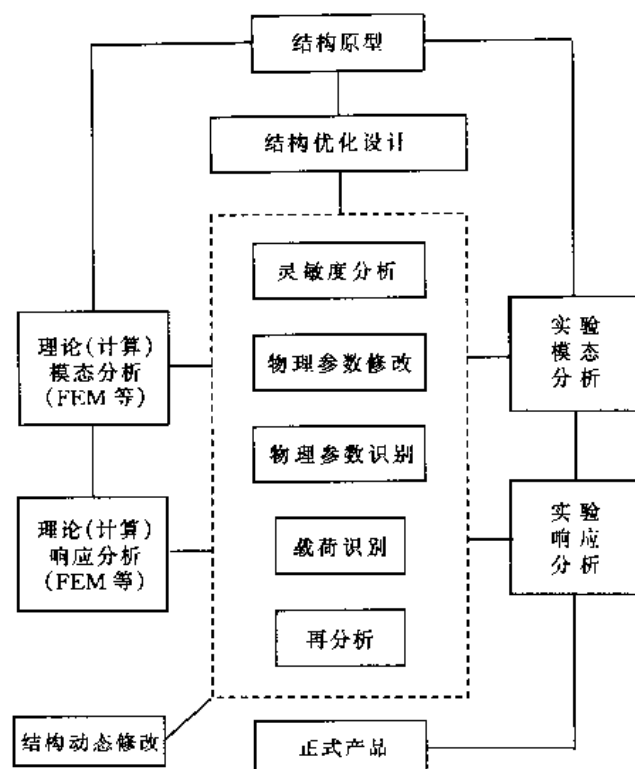


图 6.3-2 结构动态设计简图

可求出载荷自谱

$$\text{diag}[G_{\rho\rho}(\omega)] = [H^H(\omega)H(\omega)]^{-1}H^H(\omega)G_{xx}(\omega)H(\omega)[H^H(\omega)H(\omega)]^{-1} \quad (6.4-4)$$

式中要求 $M > P$ 。

该方法的特点是,只要知道频响函数矩阵 $H(\omega)$ 和响应谱 $X(\omega)$ 或 $G_{xx}(\omega)$ 即可识别载荷谱,但需在每个频率点处进行矩阵求逆运算,计算量大,而且在共振点处容易出现病态矩阵,求解不稳定。解决这一问题的有效方法是采用奇异值分解,以避免对频响函数矩阵的直接求逆。

6.4.2 频域模态坐标变换法

频域模态坐标变换法不使用频响函数,而是使用模态参数识别载荷。

设系统为粘性比例阻尼系统,已知各模态参数 k_i, m_i, c_i, φ 和位移响应谱 $X(\omega)$ 。对式(1.4-14)做傅氏变换得坐标变换

$$X(\omega) = \varphi Y(\omega) \quad (6.4-5)$$

式中 $Y(\omega)$ 为模态坐标系中的响应谱。若 φ 为满阵,则

$$Y(\omega) = \varphi^{-1} X(\omega) \quad (6.4-6)$$

对模态坐标系下解耦方程式(1.4-59)做傅氏变换,得

$$\text{diag}[k_i - \omega^2 m_i + j\omega c_i] Y(\omega) = \varphi^T F(\omega) \quad (6.4-7)$$

将式(6.4-6)代入上式,得载荷谱

$$F(\omega) = \varphi^{-T} \text{diag}[k_i - \omega^2 m_i + j\omega c_i] \varphi^{-1} X(\omega) \quad (6.4-8)$$

若 φ 为 $n \times m$ 阶矩阵, $n > m$, 由式(6.4-5)按广义逆求得

$$Y(\omega) = (\Phi^T \Phi)^{-1} \Phi^T X(\omega) \quad (6.4-9)$$

式(6.4-7)亦按广义逆求解,得载荷谱

$$F(\omega) = \Phi (\Phi^T \Phi)^{-1} \text{diag}[k_i - \omega^2 m_i + j\omega c_i] (\Phi^T \Phi)^{-1} \Phi^T X(\omega) \quad (6.4-10)$$

由此看出,由式(6.4-10)所确定的 $F(\omega)$ 和 $X(\omega)$ 的关系比由式(6.4-3)确定的关系要简单得多,只要做一次求逆运算 $(\Phi^T \Phi)^{-1}$,即可由 $X(\omega)$ 求出 $F(\omega)$ 。因此,模态坐标变换法使用方便,但精度受各模态参数识别精度的限制。

其他阻尼系统载荷识别公式也可类似导出。

6.4.3 时域模态坐标变换法

设 n 个自由度粘性阻尼系统,状态空间中的解耦方程式(1.5-55)可以写成

$$\text{diag}[a_i, a_i^*] \dot{y}' + \text{diag}[b_i, b_i^*] y' = p(t) \quad (6.4-11)$$

式中

$$p(t) = \Psi'^T f'(t) \quad (6.4-12)$$

为广义模态力。

假定已获得完整模态集 $\text{diag}[a_i, a_i^*]$ 、 $\text{diag}[b_i, b_i^*]$ 、 Ψ' ,并实测得到 $x(t)$ 、 $\dot{x}(t)$ 和 $\ddot{x}(t)$,则 x' 和 \dot{x}' 可由式(1.5-2)得到,由坐标变换式(1.5-42),得

$$y' = \Psi'^{-1} x' \quad (6.4-13)$$

$$\dot{y}' = \Psi'^{-1} \dot{x}' \quad (6.4-14)$$

由式(6.4-11)解得广义模态力 $p(t)$,由式(6.4-12)可解得状态空间载荷列阵

$$f'(t) = \Psi'^{-T} p(t) \quad (6.4-15)$$

前 n 个元素即物理空间载荷 $f(t)$ 。

如果测点数 $M > n$,则得到非完整模态集。其中 $\text{diag}[a_i, a_i^*]$ 、 $\text{diag}[b_i, b_i^*]$ 为 $2n$ 阶方阵, Ψ' 为 $2M \times 2n$ 阶矩阵,且实际激励点数 $L < n$,则式(6.4-13)~式(6.4-15)须由广义逆写出

$$y' = \Psi'^+ x' \quad (6.4-16)$$

$$\dot{y}' = \Psi'^+ \dot{x}' \quad (6.4-17)$$

$$f'(t) = \bar{\Psi}'^{+T} p(t) \quad (6.4-18)$$

式中 y' 、 \dot{y}' 、 $p(t)$ 为 $2n$ 阶列阵; x' 、 \dot{x}' 为 $2M$ 阶列阵; $f'(t)$ 为 $2L$ 阶列阵; Ψ'^+ 为 $2n \times 2M$ 阶矩阵; $\bar{\Psi}'^{+T}$ 为 $2L \times 2n$ 阶矩阵,且

$$\Psi'^+ = (\Psi'^H \Psi')^{-1} \Psi'^H \quad (6.4-19)$$

$$\bar{\Psi}'^{+T} = (\bar{\Psi}'^+ \bar{\Psi}'^T)^{-1} \bar{\Psi}'^+ \quad (6.4-20)$$

式中 $\bar{\Psi}'$ 为 Ψ' 中对应激励点的行组成的子阵, $2L \times 2n$ 阶。

应用上述方法对 2105 内燃机缸内气体压力进行了识别。试验在柴油机台架上进行,试验对象为气缸盖,如图 6.4-1 所示。2105 柴油机的主要参数是:直冷四冲程,两缸预燃室式,缸径 105 mm,冲程 130 mm,转速 1500 r/min,功率 18 kW,平均有效压力 0.68 MPa。试验工况取 1200 r/min,60% 负荷,测取柴油机气缸盖各测点的加速度响应,应用 ITD 法识别出前 16 阶模态。模态参数见表 6.4-1,图 6.4-2 给出 4 阶振型图。

表 6.4-1 气缸盖前 16 阶模态参数

模 态	1	2	3	4	5	6	7	8
模态频率(Hz)	265.50	623.08	1 051.33	1 234.82	1 555.59	1 731.53	2 090.34	2 906.91
模态阻尼比	0.027 1	0.034 1	0.041 2	0.012 8	0.039 4	0.038 7	0.034 9	0.038 0
模 态	9	10	11	12	13	14	15	16
模态频率(Hz)	3 386.01	4 388.53	4 606.50	5 138.75	6 063.61	6 158.50	6 489.71	7 407.61
模态阻尼比	0.015 1	0.029 6	0.046 4	0.025 3	0.044 0	0.031 9	0.020 9	0.021 9

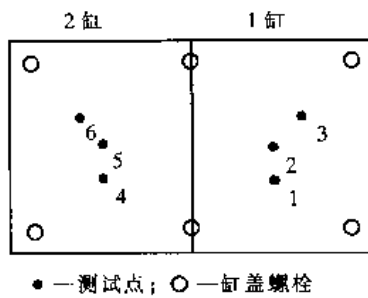


图 6.4-1 气缸盖测点布置图

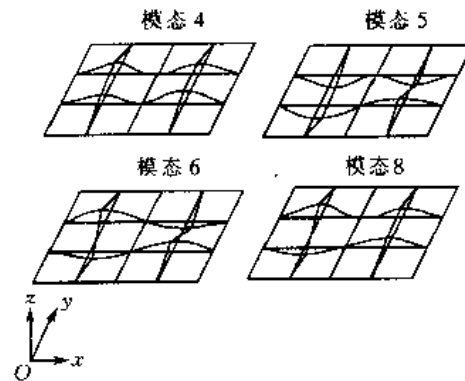


图 6.4-2 气缸盖部分振型图

由于测点布置空间的限制,只设 6 个测点,测点数少于模态阶数。为此,在做载荷识别时采用两种方案:①只取前 6 阶模态进行载荷识别;②仿照 ITD 法虚拟测点技术,增加虚拟测点,使测点总数大于等于模态阶数。两种方案的识别结果见图 6.4-3 和图 6.4-4。与计算结果比较,后者结果更精确。

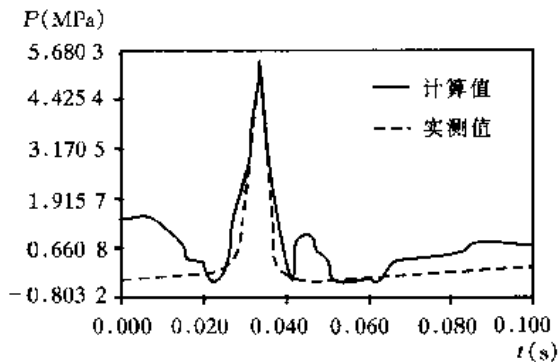


图 6.4-3 只取前 6 阶模态载荷识别结果

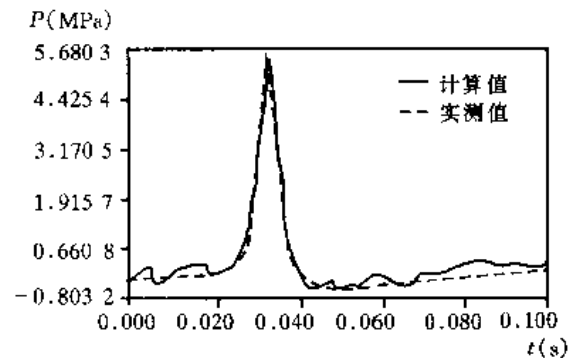


图 6.4-4 采用虚拟测点技术载荷识别结果

近年来,人们引入许多新技术,得到了载荷识别的多种新方法,如小波正交算子变换法、时间有限元法及神经网络法。小波正交算子变换法的基本思想是,基于 FEM 得到系统的物理参数矩阵 M 、 K 、 C ,选择适当的小波正交变换算子 A ,得到缩聚矩阵 M' 、 K' 、 C' 。它们分别取自 $A^T M A$ 、 $A^T K A$ 、 $A^T C A$ 的前几阶子阵。求缩聚系统的特征值问题得特征对。以此为基础,由实测响应(位移、速度、加速度之一)时间历程可识别出广义位移、广义力及实际载荷。该方法无需 $M > n > L$ 的条件,具有精度高、抗干扰性好等特点。时间有限元法将时间有限元应用于载荷识别,比传统的识别方法精度高、稳定性好,但费时较多。神经网络法的主要原理为:以 ARMA 差分方程为数学模型建立具有延时反馈的神经网络载荷识别模型,分两步进行

识别。首先输入已知载荷和响应,使网络进行学习训练;其次,输入实测响应,由网络计算输出识别载荷。其中样本载荷和响应应根据实际情况选定。该方法可识别任意类型载荷,无累积误差,精度高,抗干扰能力强。

6.5 灵敏度分析

在结构动态修改中,当表征结构动态特性的某些参数不满足预定要求时,需要对结构进行修改。比如,当某阶固有频率 ω_{0i} 距离工频较近,需要修改结构物理参数 M 、 K 、 C 。如何求得 ΔM 、 ΔK 、 ΔC 以使 ω_{0i} 朝着特定方向变化最大,这便是灵敏度分析所要解决的问题。设 p_m 表示 M 、 K 、 C 中的某一元素, ω_{0i} 对 p_m 的灵敏度分析就是寻找适当的 p_m , 使 $\frac{\partial^l \omega_{0i}}{\partial p_m^l} (l=1, 2, \dots)$ 绝对值最大且符号相同。 $\frac{\partial^l \omega_{0i}}{\partial p_m^l}$ 称为 ω_{0i} 对 p_m 的 l 阶灵敏度, 表征 ω_{0i} 对 p_m 变化的敏感程度, 一般 l 取 1 或 2 即可。

从数学意义上讲,可以定义更广泛的灵敏度概念。设 $F(p_m)$ 表示关于 $p_m (m=1, 2, \dots, M)$ 的多元函数, 则有 l 阶微分灵敏度和差分灵敏度

$$S_l(F|p_m) = \frac{\partial^l F}{\partial p_m^l} \quad (6.5-1)$$

$$S_l(F|p_m) = \frac{\Delta^l F}{\Delta p_m^l} \quad (6.5-2)$$

统称为 F 对 p_m 的 l 阶灵敏度。当 $l=1$ 时, $S_1(F|p_m)$ 常简记为 $S(F|p_m)$ 。在结构动态修改中, F 可代表任何动态特性, p_m 一般代表物理参数, 亦可表示结构参数(几何尺寸、材料性质等)。当 F 为特征值或特征矢量时, 相应灵敏度称为特征灵敏度; 当 F 为响应时, 称为响应灵敏度; 当 F 为频响函数时, 称为频响函数灵敏度。此外, 还有物理参数对特征参数的灵敏度, 称为逆特征灵敏度, 可用于结构物理参数修改。限于篇幅, 本节只讨论特征灵敏度, 其他灵敏度分析可参考有关文献。

特征灵敏度分析一般有两种方法, 即直接求导法和伴随结构法。直接求导法是从系统特征值问题的有关方程和性质出发, 通过求导直接导出特征灵敏度; 伴随结构法是根据电子学中的伴随网络理论, 利用特勒根定理和虚功原理之间的相似性, 将网络理论扩展到结构系统中的一种方法。直接求导法物理概念明确, 推导简单, 且能得到高阶灵敏度。下面只介绍此种方法。

6.5.1 复模态系统一阶特征灵敏度

设系统为粘性阻尼系统, 在状态空间中特征值问题的特征对为 λ_i 、 ψ_i' , 并设 ψ_i' 已按一定条件归一化, 即由式(1.5-14)、式(1.5-16)有

$$\psi_k'^T P \psi_i' = \begin{cases} 0 & (i \neq k) \\ 1 & (i = k) \end{cases} \quad (6.5-3)$$

$$\psi_k'^T Q \psi_i' = \begin{cases} 0 & (i \neq k) \\ -\lambda_i & (i = k) \end{cases} \quad (6.5-4)$$

将 λ_i 、 ψ'_i 代入式(1.5-8),有下述关系式成立:

$$\lambda_i P \psi'_i + Q \psi'_i = 0 \quad (6.5-5)$$

$$\lambda_i \psi'^T_i P + \psi'^T_i Q = 0^T \quad (6.5-6)$$

由以上诸式可推导特征灵敏度的表达式。

1. 特征值灵敏度

式(6.5-5)对物理参数 p_m 求偏导,即

$$\frac{\partial \lambda_i}{\partial p_m} P \psi'_i + \lambda_i \frac{\partial P}{\partial p_m} \psi'_i + \lambda_i P \frac{\partial \psi'_i}{\partial p_m} + \frac{\partial Q}{\partial p_m} \psi'_i + Q \frac{\partial \psi'_i}{\partial p_m} = 0$$

上式左乘 ψ'^T_k ,整理得

$$\frac{\partial \lambda_i}{\partial p_m} \psi'^T_k P \psi'_i + \psi'^T_k \left(\lambda_i \frac{\partial P}{\partial p_m} + \frac{\partial Q}{\partial p_m} \right) \psi'_i + (\lambda_i \psi'^T_k P + \psi'^T_k Q) \frac{\partial \psi'_i}{\partial p_m} = 0 \quad (6.5-7)$$

当 $i=k$ 时,考虑式(6.5-3)、式(6.5-6),得

$$\frac{\partial \lambda_i}{\partial p_m} = - \psi'^T_i \left(\lambda_i \frac{\partial P}{\partial p_m} + \frac{\partial Q}{\partial p_m} \right) \psi'_i \quad (6.5-8)$$

将 P 、 Q 表达式(1.5-4)、式(1.5-5)代入上式,展开得以 M 、 K 、 C 表示的一阶特征值灵敏度

$$S(\lambda_i | p_m) = \frac{\partial \lambda_i}{\partial p_m} = - \psi'^T_i \left(\lambda_i^2 \frac{\partial M}{\partial p_m} + \lambda_i \frac{\partial C}{\partial p_m} + \frac{\partial K}{\partial p_m} \right) \psi'_i \quad (6.5-9)$$

设 m_{ef} 、 k_{ef} 、 c_{ef} 分别表示 M 、 K 、 C 中第 e 行第 f 列元素,下面进一步分析特征值 λ_i 对 m_{ef} 、 k_{ef} 、 c_{ef} 的灵敏度。

(1) 特征值对质量的灵敏度 $S(\lambda_i | m_{ef})$

令 $p_m = m_{ef}$,由式(6.5-9)易得

$$S(\lambda_i | m_{ef}) = \frac{\partial \lambda_i}{\partial m_{ef}} = \begin{cases} -2\lambda_i^2 \psi_{ei} \psi_{fi} & (e \neq f) \\ -\lambda_i^2 \psi_{ei}^2 & (e = f) \end{cases} \quad (6.5-10)$$

式中, ψ_{ei} 、 ψ_{fi} 为 ψ_i 中第 e 、 f 个元素。

(2) 特征值对刚度的灵敏度 $S(\lambda_i | k_{ef})$

令 $p_m = k_{ef}$,由式(6.5-9)易得

$$S(\lambda_i | k_{ef}) = \frac{\partial \lambda_i}{\partial k_{ef}} = \begin{cases} -2\psi_{ei} \psi_{fi} & (e \neq f) \\ -\psi_{ei}^2 & (e = f) \end{cases} \quad (6.5-11)$$

(3) 特征值对阻尼的灵敏度 $S(\lambda_i | c_{ef})$

令 $p_m = c_{ef}$,由式(6.5-9)易得

$$S(\lambda_i | c_{ef}) = \frac{\partial \lambda_i}{\partial c_{ef}} = \begin{cases} -2\lambda_i \psi_{ei} \psi_{fi} & (e \neq f) \\ -\lambda_i \psi_{ei}^2 & (e = f) \end{cases} \quad (6.5-12)$$

分析上面三种灵敏度可知:

①对某阶特征值 λ_i ,该阶模态振型中变形较大的部位为敏感部位,改变这些部位的物理参数,将获得较大的特征值灵敏度;

② $S(\lambda_i | m_{ef})$ 和 $S(\lambda_i | c_{ef})$ 与 λ_i 有关,即当质量、阻尼改变时,对各阶模态特征值灵敏度

影响不同, λ_i 越大, 影响越大, 即质量和阻尼的变化对高阶模态特征值影响较大, 而 $S(\lambda_i | k_{ef})$ 与 λ_i 无关, 即刚度变化对各阶模态特征值影响相同。

必须注意, 结论②是在特征矢量归一化条件式(6.5-3)下成立的。

2. 特征矢量灵敏度

由式(6.5-6), 有

$$\lambda_k \psi_k'^T \mathbf{P} + \psi_k'^T \mathbf{Q} = \mathbf{0}^T$$

则

$$\psi_k'^T \mathbf{Q} = -\lambda_k \psi_k'^T \mathbf{P} \quad (6.5-13)$$

当 $i \neq k$ 时, 考虑式(6.5-3)和式(6.5-13), 由式(6.5-7)得

$$(\lambda_i - \lambda_k) \psi_k'^T \mathbf{P} \frac{\partial \psi_i'}{\partial p_m} + \psi_k'^T \left(\lambda_i \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial p_m} + \frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial p_m} \right) \psi_i' = 0 \quad (6.5-14)$$

假设 $\frac{\partial \psi_i'}{\partial p_m}$ 为 ψ_i' 的线性组合, 即

$$\frac{\partial \psi_i'}{\partial p_m} = \sum_{s=1}^n \alpha_s \psi_s' \quad (6.5-15)$$

代入式(6.5-14)并考虑正交条件式(6.5-3), 得

$$(\lambda_i - \lambda_k) \alpha_k + \psi_k'^T \left(\lambda_i \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial p_m} + \frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial p_m} \right) \psi_i' = 0$$

从而

$$\alpha_k = \frac{1}{\lambda_k - \lambda_i} \psi_k'^T \left(\lambda_i \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial p_m} + \frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial p_m} \right) \psi_i' \quad (k \neq i) \quad (6.5-16)$$

或

$$\alpha_k = \frac{1}{\lambda_k - \lambda_i} \psi_k'^T \left(\lambda_i^2 \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial p_m} + \lambda_i \frac{\partial \mathbf{C}}{\partial p_m} + \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial p_m} \right) \psi_i' \quad (k \neq i) \quad (6.5-17)$$

当 $k = i$ 时, 式(6.5-3)对 p_m 求偏导, 即

$$\frac{\partial \psi_i'^T}{\partial p_m} \mathbf{P} \psi_i' + \psi_i'^T \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial p_m} \psi_i' + \psi_i'^T \mathbf{P} \frac{\partial \psi_i'}{\partial p_m} = 0$$

考虑 \mathbf{P} 的对称性, 上式中第一、第三项相等, 故有

$$2 \psi_i'^T \mathbf{P} \frac{\partial \psi_i'}{\partial p_m} + \psi_i'^T \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial p_m} \psi_i' = 0 \quad (6.5-18)$$

将式(6.5-15)代入上式, 考虑正交条件式(6.5-3), 得

$$2\alpha_i + \psi_i'^T \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial p_m} \psi_i' = 0$$

从而

$$\alpha_i = -\frac{1}{2} \psi_i'^T \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial p_m} \psi_i' \quad (6.5-19)$$

或

$$\alpha_k = -\frac{1}{2} \psi_i'^T \left(2\lambda_i \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial p_m} + \frac{\partial \mathbf{C}}{\partial p_m} \right) \psi_i' \quad (k = i) \quad (6.5-20)$$

取式(6.5-15)上半部分即为模态矢量灵敏度

$$S(\boldsymbol{\psi}_i | p_m) = \frac{\partial \boldsymbol{\psi}_i}{\partial p_m} = \sum_{k=1}^n \alpha_k \boldsymbol{\psi}_k \quad (6.5-21)$$

式(6.5-15)或式(6.5-21)、式(6.5-17)和式(6.5-20)即表示特征矢量 $\boldsymbol{\psi}_i$ 或模态矢量 $\boldsymbol{\psi}_i$ 对 p_m 的灵敏度。易推导出特征矢量对质量、刚度和阻尼的灵敏度。

(1)特征矢量对质量的灵敏度

$$S(\boldsymbol{\psi}_i | m_{ef}) = \frac{\partial \boldsymbol{\psi}_i}{\partial m_{ef}} = \sum_{k=1}^n \alpha_k \boldsymbol{\psi}_k \quad (6.5-22)$$

式中,当 $k \neq i$, 有

$$\alpha_k = \begin{cases} \frac{\lambda_i^2}{\lambda_k - \lambda_i} (\psi_{ek} \psi_{fi} + \psi_{ei} \psi_{fk}) & (e \neq f) \\ \frac{\lambda_i^2}{\lambda_k - \lambda_i} \psi_{ek} \psi_{ei} & (e = f) \end{cases} \quad (6.5-23)$$

当 $k = i$, 有

$$\alpha_k = \begin{cases} -2\lambda_i \psi_{ei} \psi_{fi} & (e \neq f) \\ -\lambda_i \psi_{ei}^2 & (e = f) \end{cases} \quad (6.5-24)$$

(2)特征矢量对刚度的灵敏度

$$S(\boldsymbol{\psi}_i | k_{ef}) = \frac{\partial \boldsymbol{\psi}_i}{\partial k_{ef}} = \sum_{k=1}^n \beta_k \boldsymbol{\psi}_k \quad (6.5-25)$$

式中,当 $k \neq i$, 有

$$\beta_k = \begin{cases} \frac{1}{\lambda_k - \lambda_i} (\psi_{ek} \psi_{fi} + \psi_{ei} \psi_{fk}) & (e \neq f) \\ \frac{1}{\lambda_k - \lambda_i} \psi_{ek} \psi_{ei} & (e = f) \end{cases} \quad (6.5-26)$$

当 $k = i$, 有

$$\beta_k = 0 \quad (6.5-27)$$

(3)特征矢量对阻尼的灵敏度

$$S(\boldsymbol{\psi}_i | c_{ef}) = \frac{\partial \boldsymbol{\psi}_i}{\partial c_{ef}} = \sum_{k=1}^n \gamma_k \boldsymbol{\psi}_k \quad (6.5-28)$$

式中,当 $k \neq i$, 有

$$\gamma_k = \begin{cases} \frac{\lambda_i}{\lambda_k - \lambda_i} (\psi_{ek} \psi_{fi} + \psi_{ei} \psi_{fk}) & (e \neq f) \\ \frac{\lambda_i}{\lambda_k - \lambda_i} \psi_{ek} \psi_{ei} & (e = f) \end{cases} \quad (6.5-29)$$

当 $k = i$, 有

$$\gamma_k = \begin{cases} -\psi_{ei} \psi_{fi} & (e \neq f) \\ -\frac{1}{2} \psi_{ei}^2 & (e = f) \end{cases} \quad (6.5-30)$$

分析以上结果,对特征矢量灵敏度有以下结论:

①特征矢量灵敏度表示为各阶模态矢量的线性组合, α_k 表示第 k 阶模态矢量对灵敏度的贡献大小或权重;

②模态阶数越大, λ_i 越大, 因此, 修改质量对高阶模态振型影响大, 修改刚度对低阶模态振型影响大, 修改阻尼对高阶与低阶振型影响程度相差不明显;

③对 $S(\boldsymbol{\psi}_i | k_{ef}), \beta_i = 0$, 即 $\boldsymbol{\psi}_i$ 的参与因子(权重)为零;

④无论何种灵敏度, 当修改振型较大部位对应的质量、刚度或阻尼时, 对该阶振型影响都较大, 如第 k, i 阶振型 $\boldsymbol{\psi}_k, \boldsymbol{\psi}_i$ 中第 e, f 个元素较大, 则 $(\psi_{ek}\psi_{fi} + \psi_{ei}\psi_{fk})$ 较大, 因而特征矢量灵敏度也较大。

从特征值灵敏度和特征矢量灵敏度可以看出它们有以下共性:

①修改质量对模态频率和模态振型的影响最大;

②修改振型中变形较大部位对模态频率和模态振型影响较大;

③修改质量时, 对高阶模态的模态频率和振型影响大于对低阶模态的影响。

另外, 由特征值灵敏度可马上得到模态频率和模态阻尼灵敏度, 一般只关心模态频率灵敏度。

6.5.2 实模态系统一阶特征灵敏度

对粘性比例阻尼系统, 由上述结论可得到形式完全相同的特征灵敏度表达式, 注意模态矢量归一化仍如式(6.5-3)所示。

对小阻尼系统, 固有频率与模态频率(阻尼固有频率)相差甚微, 因此工程上在做特征灵敏度分析时常将小阻尼系统简化为无阻尼系统, 只分析质量和刚度变化对固有频率和振型的影响。仿照粘性阻尼系统特征灵敏度的推导过程, 不难得到无阻尼系统特征灵敏度

$$S(\omega_{0i}, m_{ef}) = \frac{\partial \omega_{0i}}{\partial m_{ef}} = \begin{cases} -\omega_{0i} \varphi_e \varphi_{fi} & (e \neq f) \\ -\frac{\omega_{0i}}{2} \varphi_e^2 & (e = f) \end{cases} \quad (6.5-31)$$

$$S(\omega_{0i} | k_{ef}) = \frac{\partial \omega_{0i}}{\partial k_{ef}} = \begin{cases} \frac{1}{\omega_{0i}} \varphi_e \varphi_{fi} & (e \neq f) \\ \frac{1}{2\omega_{0i}} \varphi_e^2 & (e = f) \end{cases} \quad (6.5-32)$$

$$S(\boldsymbol{\varphi}_i, m_{ef}) = \frac{\partial \boldsymbol{\varphi}_i}{\partial m_{ef}} = \sum_{k=1}^n \alpha_k \boldsymbol{\varphi}_k \quad (6.5-33)$$

式中, 当 $k \neq i$, 有

$$\alpha_k = \begin{cases} \frac{\omega_{0i}^2}{\omega_{0k}^2 - \omega_{0i}^2} (\varphi_{ek} \varphi_{fi} + \varphi_{ei} \varphi_{fk}) & (e \neq f) \\ \frac{\omega_{0i}^2}{\omega_{0k}^2 - \omega_{0i}^2} \varphi_{ek} \varphi_{ei} & (e = f) \end{cases} \quad (6.5-34)$$

当 $k = i$, 有

$$\alpha_k = \begin{cases} -\varphi_e \varphi_{fi} & (e \neq f) \\ -\frac{1}{2} \varphi_e^2 & (e = f) \end{cases} \quad (6.5-35)$$

$$S(\boldsymbol{\varphi}_i | k_{ef}) = \frac{\partial \boldsymbol{\varphi}_i}{\partial k_{ef}} = \sum_{k=1}^n \beta_k \boldsymbol{\varphi}_k \quad (6.5-36)$$

式中,当 $k \neq i$, 有

$$\beta_k = \begin{cases} \frac{1}{\omega_{0k}^2 - \omega_{0i}^2} (\varphi_{ek} \varphi_{fi} + \varphi_{ei} \varphi_{fk}) & (e \neq f) \\ \frac{1}{\omega_{0k}^2 - \omega_{0i}^2} \varphi_{ek} \varphi_{ei} & (e = f) \end{cases} \quad (6.5-37)$$

当 $k = i$, 有

$$\beta_k = 0 \quad (6.5-38)$$

特别指出,以上结论所用模态矢量归一化条件为

$$\boldsymbol{\varphi}_i^T \mathbf{M} \boldsymbol{\varphi}_i = 1 \quad (6.5-39)$$

因此,在特征值灵敏度表达式(6.5-10)、式(6.5-11)中,令 $\lambda_i = j\omega_{0i}$, $\boldsymbol{\psi}_i = \boldsymbol{\varphi}_i$, 并不能得到式(6.5-31)、式(6.5-32)。

事实上,将正交条件式(6.5-3)展开,或直接由式(1.5-21),可得

$$\boldsymbol{\psi}_i^T 2\lambda_i \mathbf{M} \boldsymbol{\psi}_i = 1 \quad (6.5-40)$$

此条件为式(6.5-10)、式(6.5-11)所使用的归一化条件。比较式(6.5-39)、式(6.5-40),有

$$\boldsymbol{\psi}_i = \frac{1}{\sqrt{2\lambda_i}} \boldsymbol{\varphi}_i \quad (6.5-41)$$

代入式(6.5-10)、式(6.5-11)得

$$S(\lambda_i | m_{ef}) = \frac{\partial \lambda_i}{\partial m_{ef}} = \begin{cases} -\lambda_i \varphi_{en} \varphi_{fi} & (e \neq f) \\ -\frac{\lambda_i}{2} \varphi_{en}^2 & (e = f) \end{cases} \quad (6.5-42)$$

$$S(\lambda_i | k_{ef}) = \frac{\partial \lambda_i}{\partial k_{ef}} = \begin{cases} -\frac{1}{\lambda_i} \varphi_{en} \varphi_{fi} & (e \neq f) \\ -\frac{1}{2\lambda_i} \varphi_{en}^2 & (e = f) \end{cases} \quad (6.5-43)$$

此二式为满足归一化条件式(6.5-39)的特征值灵敏度表达式。令 $\lambda_i = j\omega_{0i}$, 式(6.5-42)、式(6.5-43)即成为式(6.5-31)、式(6.5-32)。从而证明实模态无阻尼系统与复模态粘性阻尼系统的统一性。

然而,并不能由上述关系从粘性阻尼系统特征矢量灵敏度式(6.5-22)~式(6.5-27)导出式(6.5-33)~式(6.5-38)。这是因为这两种系统特征矢量灵敏度定义并不统一,即式(6.5-22)与式(6.5-33)不等价,式(6.5-25)与式(6.5-36)不等价。

将上面推导出的微分灵敏度写成差分灵敏度形式,即可得到特征参数改变量与物理参数改变量的关系。

当物理参数改变量较大时,直接应用上述结论会导致较大误差。这时可采取分段计算方法,即将物理参数的较大改变量分成若干微小改变量,逐步计算每一微小物理参数改变引起的特征参数改变量,得到最终结果。另外,为了更有效地判断特征参数对物理参数的敏感性,补充考虑二阶特征灵敏度,效果更佳。

6.5.3 实例

图 6.5-1 表示一个 4 自由度无阻尼振动系统,各物理参数为: $m_1 = 1 \text{ kg}$, $m_2 = 2 \text{ kg}$, m_3

$= 2 \text{ kg}, m_4 = 3 \text{ kg}, k_1 = 800 \text{ N/m}, k_2 = 1\,600 \text{ N/m}, k_3 = 2\,400 \text{ N/m}, k_4 = 3\,200 \text{ N/m}$ 。其质量阵和刚度阵为

$$M = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & 2 & & \\ & & 2 & \\ & & & 3 \end{bmatrix}, K = \begin{bmatrix} 800 & -800 & & \\ -800 & 2\,400 & -1\,600 & \\ & -1\,600 & 4\,000 & -2\,400 \\ & & -2\,400 & 5\,600 \end{bmatrix}$$

系统的固有频率和正则化特征矢量为

$$\omega_{01} = 13.294 \text{ s}^{-1}, \omega_{02} = 29.660 \text{ s}^{-1}, \omega_{03} = 41.079 \text{ s}^{-1}, \omega_{04} = 55.882 \text{ s}^{-1}$$

$$\phi_1 = [0.590 \ 1 \ 0.460 \ 1 \ 0.272 \ 7 \ 0.138 \ 7]^T,$$

$$\phi_2 = [-0.678 \ 0 \ 0.068 \ 3 \ 0.365 \ 8 \ 0.296 \ 8]^T,$$

$$\phi_3 = [0.431 \ 4 \ -0.478 \ 6 \ 0.076 \ 3 \ 0.339 \ 0]^T,$$

$$\phi_4 = [-0.087 \ 6 \ 0.235 \ 4 \ -0.524 \ 1 \ 0.334 \ 3]^T。$$

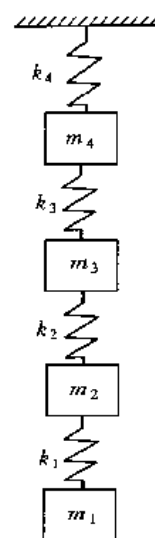


图 6.5-1 振动模型

根据式(6.5-31)、式(6.5-32),计算系统特征值灵敏度,结果如表 6.5-1 所示。

表 6.5-1 特征值灵敏度

特征值灵敏度		模态阶数(i)			
		1	2	3	4
$S(\omega_{0i} m_{ef})$ $\left(\frac{1}{s^2 \cdot \text{kg}}\right)$	m_{11}	<u>-2.314 5</u>	<u>-6.817 4</u>	-3.822 4	-0.214 4
	m_{22}	-1.407 1	-0.069 2	<u>-4.705 6</u>	-1.549 0
	m_{33}	-0.494 3	-1.948 4	-0.119 6	<u>-7.674 8</u>
	m_{44}	-0.127 9	-1.306 5	-2.360 0	-3.123 8
$S(\omega_{0i} k_{ef})$ $\left(\frac{\text{m}}{\text{N} \cdot \text{s}^2} \times 10^{-3}\right)$	k_{11}	<u>26.177 2</u>	<u>15.498 9</u>	4.528 3	0.137 8
	k_{12}, k_{21}	20.460 3	-1.560 1	-5.026 9	-0.368 6
	k_{22}	15.924 4	0.158 5	<u>5.577 1</u>	0.991 4
	k_{23}, k_{32}	9.282 4	0.842 9	-0.888 5	-2.208 2
	k_{33}	5.596 5	4.511 1	0.141 2	<u>4.915 7</u>
	k_{34}, k_{43}	2.843 4	-3.661 5	0.630 5	-3.201 4
	k_{44}	1.444 3	2.970 3	2.797 0	2.000 6

表中画线的数据为影响该阶模态固有频率最大者。比如,欲降低该系统第 2 阶固有频率,选择增大 m_{11} (m_1) 或降低 k_{11} (k_1) 将最有效。

特征矢量灵敏度由式(6.5-33)~式(6.5-38)可以求出,此处从略。

6.6 物理参数修改

FEM 和 EMA 是结构动态设计中的两种基本方法。通常认为, FEM 计算结果存在误差, 而 EMA 的结果是准确的。然而, 一般做 FEM 计算比做 EMA 要方便得多, 特别是在修改结构时, 能够方便预测修改后结构各种动态特性。为了有效地利用 FEM 这一强有力工具, 可以使用 EMA 结果对 FEM 模型进行修正, 以得到准确的 FEM 模型, 即所谓的综合建模问题。修正

的条件是已知原 FEM 模型(质量阵 M_0 和刚度阵 K_0)及其结果(特征值矩阵 Λ_0 和特征矢量矩阵 φ_0)、EMA 实验结果(特征值矩阵 Λ 和特征矢量矩阵 φ)。修改的结果通常以物理参数变化值 ΔM 、 ΔK 表示。因此,综合建模问题又称为物理参数修改。

一般地,FEM 模型的自由度比 EMA 模型自由度要多得多,即 FEM 模型中 M_0 、 K_0 的阶数比 EMA 模型中 M 、 K 的阶数要高得多。为了能使两种模型进行比较,必须按照 M 、 K 的构造特征对 M_0 、 K_0 进行降阶,即将 M_0 、 K_0 中对应 EMA 测点(自由度)保留,对应非测点(自由度)去掉,且保证能量等效,这一过程称为自由度缩减或物理参数矩阵的缩聚。下面首先介绍物理参数矩阵缩聚的常用方法,再介绍物理参数修改的常用方法。

6.6.1 物理参数矩阵的缩聚

常用的缩聚方法有两类,即静态缩聚法和动态缩聚法。静态缩聚法的基本方程为系统的静态平衡方程,因而方程中只包含刚度阵而不包含质量阵。动态缩聚法的基本方程是动态平衡方程或其特征解方程,因而方程中包含质量阵和刚度阵。动态缩聚法比静态缩聚法更准确,然而要复杂得多,因此经常采用静态缩聚法进行自由度缩减。

1. Guyan 静态缩聚法

设结构刚度矩阵为 K ,在静力 f 作用下平衡,静位移为 x ,则平衡方程为

$$Kx = f \quad (6.6-1)$$

按拟保留自由度 p 和缩聚自由度 s 写成分块形式

$$\begin{bmatrix} K_{pp} & K_{ps} \\ K_{ps}^T & K_{ss} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_p \\ x_s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_p \\ f_s \end{bmatrix} \quad (6.6-2)$$

令 $f_s = 0$,则

$$x_s = -K_{ss}^{-1} K_{ps}^T x_p \quad (6.6-3)$$

从而

$$x = \begin{bmatrix} x_p \\ x_s \end{bmatrix} = \tilde{T} x_p \quad (6.6-4)$$

式中

$$\tilde{T} = \begin{bmatrix} I \\ -K_{ss}^{-1} K_{ps}^T \end{bmatrix} \quad (6.6-5)$$

为 $(p+s) \times p$ 阶矩阵,称为缩聚矩阵, I 为 p 阶单位阵。

设缩聚后结构刚度阵为 \tilde{K} ,质量矩阵为 \tilde{M} 。根据能量等效原则,缩聚前后势能和动能保持不变,即

$$\frac{1}{2} x^T K x = \frac{1}{2} x_p^T \tilde{K} x_p \quad (6.6-6)$$

$$\frac{1}{2} \dot{x}^T M \dot{x} = \frac{1}{2} \dot{x}_p^T \tilde{M} \dot{x}_p \quad (6.6-7)$$

将式(6.6-5)代入以上二式得缩聚后矩阵

$$\tilde{K} = \tilde{T}^T K \tilde{T} = K_{pp} - K_{ps} K_{ss}^{-1} K_{ps}^T \quad (6.6-8)$$

$$\tilde{M} = \tilde{T}^T M \tilde{T} = M_{pp} - M_{ps} K_{ss}^{-1} K_{ps}^T - K_{ps} K_{ss}^{-1} (M_{ps}^T - M_{ss} K_{ss}^{-1} K_{ps}^T) \quad (6.6-9)$$

式中

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} \mathbf{M}_{pp} & \mathbf{M}_{ps} \\ \mathbf{M}_{ps}^T & \mathbf{M}_{ss} \end{bmatrix} \quad (6.6-10)$$

2. 动态缩聚法

写出振动结构特征值问题方程的分块形式

$$\left(\begin{bmatrix} \mathbf{K}_{pp} & \mathbf{K}_{ps} \\ \mathbf{K}_{ps}^T & \mathbf{K}_{ss} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \mathbf{A}_p & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{A}_s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{M}_{pp} & \mathbf{M}_{ps} \\ \mathbf{M}_{ps}^T & \mathbf{M}_{ss} \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} \boldsymbol{\varphi}_p \\ \boldsymbol{\varphi}_s \end{bmatrix} = \mathbf{0} \quad (6.6-11)$$

式中 \mathbf{A}_p 、 \mathbf{A}_s 为谱矩阵 $\mathbf{A} = \text{diag}[\omega_{0i}^2]$ 的对角块阵； $\boldsymbol{\varphi}_p$ 表示保留自由度对应的振型矩阵； $\boldsymbol{\varphi}_s$ 表示缩聚自由度对应的振型矩阵。将式(6.6-11)展开，写出第二式

$$(\mathbf{K}_{ps} - \mathbf{A}_s \mathbf{M}_{ps})^T \boldsymbol{\varphi}_p + (\mathbf{K}_{ss} - \mathbf{A}_s \mathbf{M}_{ss}) \boldsymbol{\varphi}_s = \mathbf{0} \quad (6.6-12)$$

则

$$\boldsymbol{\varphi}_s = \mathbf{T}_s \boldsymbol{\varphi}_p \quad (6.6-13)$$

式中

$$\mathbf{T}_s = -(\mathbf{K}_{ss} - \mathbf{A}_s \mathbf{M}_{ss})^{-1}(\mathbf{K}_{ps} - \mathbf{A}_s \mathbf{M}_{ps})^T \quad (6.6-14)$$

从而

$$\boldsymbol{\varphi} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\varphi}_p \\ \boldsymbol{\varphi}_s \end{bmatrix} = \tilde{\mathbf{T}} \boldsymbol{\varphi}_p \quad (6.6-15)$$

式中

$$\tilde{\mathbf{T}} = \begin{bmatrix} \mathbf{I} \\ \mathbf{T}_s \end{bmatrix} \quad (6.6-16)$$

为缩聚矩阵。

根据能量等效原则，可得缩聚后系统物理参数矩阵

$$\tilde{\mathbf{K}} = \tilde{\mathbf{T}}^T \mathbf{K} \tilde{\mathbf{T}} = \mathbf{K}_{pp} + \mathbf{K}_{ps} \mathbf{T}_s + \mathbf{T}_s^T \mathbf{K}_{ps}^T + \mathbf{T}_s^T \mathbf{K}_{ss} \mathbf{T}_s \quad (6.6-17)$$

$$\tilde{\mathbf{M}} = \tilde{\mathbf{T}}^T \mathbf{M} \tilde{\mathbf{T}} = \mathbf{M}_{pp} + \mathbf{M}_{ps} \mathbf{T}_s + \mathbf{T}_s^T \mathbf{M}_{ps}^T + \mathbf{T}_s^T \mathbf{M}_{ss} \mathbf{T}_s \quad (6.6-18)$$

若 $\mathbf{A} = \mathbf{0}$ ，得静态缩聚结果式(6.6-8)、式(6.6-9)。动态缩聚中的缩聚矩阵 $\tilde{\mathbf{T}}$ 与 \mathbf{A}_s 有关，通常需用迭代法求解。

下面介绍物理参数修改的常用方法。在这些方法中，FEM 模型的有关参数均为缩减后的参数。

6.6.2 物理参数修改之一——J. C. Chen 矩阵摄动法

对实模态系统，设 FEM 对应的质量阵、刚度阵、特征值矩阵、特征矢量矩阵分别为 \mathbf{M}_0 、 \mathbf{K}_0 、 \mathbf{A}_0 、 $\boldsymbol{\varphi}_0$ ，EMA 相应的矩阵为 \mathbf{M} 、 \mathbf{K} 、 \mathbf{A} 、 $\boldsymbol{\varphi}$ ，其误差为 $\Delta \mathbf{M}$ 、 $\Delta \mathbf{K}$ 、 $\Delta \mathbf{A}$ 、 $\Delta \boldsymbol{\varphi}$ ，并假设为小量，则

$$\mathbf{M} = \mathbf{M}_0 + \Delta \mathbf{M} \quad (6.6-19)$$

$$\mathbf{K} = \mathbf{K}_0 + \Delta \mathbf{K} \quad (6.6-20)$$

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}_0 + \Delta \mathbf{A} \quad (6.6-21)$$

$$\boldsymbol{\varphi} = \boldsymbol{\varphi}_0 + \Delta \boldsymbol{\varphi} \quad (6.6-22)$$

Chen 摄动法的思想是：

$$\mathbf{M}_0, \mathbf{K}_0, \mathbf{A}_0, \boldsymbol{\varphi}_0, \mathbf{A}, \boldsymbol{\varphi} \xrightarrow[\text{Lagrange 乘子法}]{\text{正交性}} \Delta \mathbf{M}, \Delta \mathbf{K} \quad (6.6-23)$$

Chen 假设

$$\Delta \boldsymbol{\varphi} = \boldsymbol{\varphi}_0 \mathbf{A} \quad (6.6-24)$$

\mathbf{A} 为系数矩阵, 于是式(6.6-22)写成

$$\boldsymbol{\varphi} = \boldsymbol{\varphi}_0 (\mathbf{I} + \mathbf{A}) \quad (6.6-25)$$

EMA 模型的正交条件(已归一化)为

$$\boldsymbol{\varphi}^T \mathbf{M} \boldsymbol{\varphi} = \mathbf{I} \quad (6.6-26)$$

$$\boldsymbol{\varphi}^T \mathbf{K} \boldsymbol{\varphi} = \mathbf{A} \quad (6.6-27)$$

将式(6.6-19)~式(6.6-21)及式(6.6-25)代入以上二式, 只保留 $\Delta \mathbf{M}, \Delta \mathbf{K}, \Delta \mathbf{A}, \Delta \boldsymbol{\varphi}$ 的一次项, 整理得

$$\boldsymbol{\varphi}_0^T \Delta \mathbf{M} \boldsymbol{\varphi}_0 = -\mathbf{A} - \mathbf{A}^T \quad (6.6-28)$$

$$\boldsymbol{\varphi}_0^T \Delta \mathbf{K} \boldsymbol{\varphi}_0 = \Delta \mathbf{A} - \mathbf{A}_0 \mathbf{A} - \mathbf{A}^T \mathbf{A}_0 \quad (6.6-29)$$

考虑 FEM 模型的正交条件(已归一化)

$$\boldsymbol{\varphi}_0^T \mathbf{M}_0 \boldsymbol{\varphi}_0 = \mathbf{I} \quad (6.6-30)$$

及由式(6.6-25)解出的 \mathbf{A} 矩阵

$$\mathbf{A} = \boldsymbol{\varphi}_0^{-1} \boldsymbol{\varphi} - \mathbf{I} \quad (6.6-31)$$

由式(6.6-28)、式(6.6-29)可解得

$$\Delta \mathbf{M} = \mathbf{M}_0 \boldsymbol{\varphi}_0 (2\mathbf{I} - \boldsymbol{\varphi}_0^T \mathbf{M}_0 \boldsymbol{\varphi}_0 - \boldsymbol{\varphi}^T \mathbf{M}_0 \boldsymbol{\varphi}_0) \boldsymbol{\varphi}_0^T \mathbf{M}_0 \quad (6.6-32)$$

$$\Delta \mathbf{K} = \mathbf{M}_0 \boldsymbol{\varphi}_0 (\mathbf{A}_0 + \mathbf{A} - \boldsymbol{\varphi}_0^T \mathbf{K}_0 \boldsymbol{\varphi}_0 - \boldsymbol{\varphi}^T \mathbf{K}_0 \boldsymbol{\varphi}_0) \boldsymbol{\varphi}_0^T \mathbf{M}_0 \quad (6.6-33)$$

注意, 即使在推导过程中, 假设了 $\mathbf{A}_0, \mathbf{A}, \boldsymbol{\varphi}_0, \boldsymbol{\varphi}$ 为完整模态集, 但由结果式(6.6-32)、式(6.6-33)可知, 该方法允许使用非完整模态集。

6.6.3 物理参数修改之二——Berman 约束优化法

Berman 法的基本思想是:

$$\mathbf{M}_0, \mathbf{K}_0, \mathbf{A}, \boldsymbol{\varphi} \xrightarrow[\text{Lagrange 乘子法}]{\text{正交性}} \Delta \mathbf{M}, \Delta \mathbf{K} \quad (6.6-34)$$

$\mathbf{A}, \boldsymbol{\varphi}$ 为由 EMA 得到的非完整模态集。

该方法的基本公式为

$$\mathbf{M} = \mathbf{M}_0 + \Delta \mathbf{M} \quad (6.6-19)$$

$$\mathbf{K} = \mathbf{K}_0 + \Delta \mathbf{K} \quad (6.6-20)$$

$$\boldsymbol{\varphi}^T \mathbf{M} \boldsymbol{\varphi} = \mathbf{I} \quad (6.6-26)$$

$$\boldsymbol{\varphi}^T \mathbf{K} \boldsymbol{\varphi} = \mathbf{A} \quad (6.6-27)$$

首先求 $\Delta \mathbf{M}$ 。将式(6.6-19)代入式(6.6-26), 得

$$\boldsymbol{\varphi}^T \Delta \mathbf{M} \boldsymbol{\varphi} = \mathbf{I} - \mathbf{E}_0 \quad (6.6-35)$$

式中

$$\mathbf{E}_0 = \boldsymbol{\varphi}^T \mathbf{M}_0 \boldsymbol{\varphi} \quad (6.6-36)$$

为正交检验矩阵, 一般不是对角阵。式(6.6-35)的解 $\Delta \mathbf{M}$ 不是惟一的。为由式(6.6-35)求 $\Delta \mathbf{M}$, 定义范数

$$\varepsilon_m = \| \mathbf{M}_0^{-\frac{1}{2}} \Delta \mathbf{M} \mathbf{M}_0^{-\frac{1}{2}} \| \quad (6.6-37)$$

形成约束优化问题(条件极值问题)

$$\begin{cases} \min \varepsilon_m = \| \mathbf{M}_0^{-\frac{1}{2}} \Delta \mathbf{M} \mathbf{M}_0^{-\frac{1}{2}} \| \\ \boldsymbol{\varphi}^T \Delta \mathbf{M} \boldsymbol{\varphi} - \mathbf{I} + \mathbf{E}_0 = \mathbf{0} \end{cases} \quad (6.6-38)$$

应用 Lagrange 乘子法构造 Lagrange 函数

$$L_m = \varepsilon_m + \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m L_{ij} (\boldsymbol{\varphi}^T \Delta \mathbf{M} \boldsymbol{\varphi} - \mathbf{I} + \mathbf{E}_0)_{ij} \quad (6.6-39)$$

式中 L_{ij} 为 Lagrange 乘子, $(\)_{ij}$ 表示 $(\)$ 矩阵中的第 i 行第 j 列元素, m 表示 EMA 模型阶数。令

$$\frac{\partial L_m}{\partial (\Delta \mathbf{M}_{ij})} = 0 \quad (i, j = 1, 2, \dots, m) \quad (6.6-40)$$

$$\frac{\partial L_m}{\partial L_{ij}} = 0 \quad (i, j = 1, 2, \dots, m) \quad (6.6-41)$$

式中 $\Delta \mathbf{M}_{ij} = (\Delta \mathbf{M})_{ij}$, 得

$$\Delta \mathbf{M} = -\frac{1}{2} \mathbf{M}_0 \boldsymbol{\varphi} \mathbf{L}^T \boldsymbol{\varphi}^T \mathbf{M}_0 \quad (6.6-42)$$

式中

$$\mathbf{L} = -2 \mathbf{E}_0^{-1} (\mathbf{I} - \mathbf{E}_0) \mathbf{E}_0^{-1} \quad (6.6-43)$$

为 Lagrange 乘子矩阵, $m \times m$ 阶对称矩阵。式(6.6-43)代入式(6.6-42), 得

$$\Delta \mathbf{M} = \mathbf{M}_0 \boldsymbol{\varphi} \mathbf{E}_0^{-1} (\mathbf{I} - \mathbf{E}_0) \mathbf{E}_0^{-1} \boldsymbol{\varphi}^T \mathbf{M}_0 \quad (6.6-44)$$

Berman 求得 $\Delta \mathbf{M}$ 后, F. S. Wei 采用同样思路推导出 $\Delta \mathbf{K}$ 。求 $\Delta \mathbf{K}$ 的约束优化问题为

$$\begin{cases} \min \varepsilon_m = \| \mathbf{M}_0^{-\frac{1}{2}} \Delta \mathbf{K} \mathbf{M}_0^{-\frac{1}{2}} \| \\ (\mathbf{K} - \Delta \mathbf{M}) \boldsymbol{\varphi} = \mathbf{0} \\ \boldsymbol{\varphi}^T \mathbf{K} \boldsymbol{\varphi} - \mathbf{A} = \mathbf{0} \\ \Delta \mathbf{K} - \Delta \mathbf{K}^T = \mathbf{0} \end{cases} \quad (6.6-45)$$

应用 Lagrange 乘子法, 可求得

$$\Delta \mathbf{K} = \Delta \mathbf{K}' + \Delta \mathbf{K}'^T \quad (6.6-46)$$

式中

$$\Delta \mathbf{K}' = \frac{1}{2} \mathbf{M}_0 \boldsymbol{\varphi} (\boldsymbol{\varphi}^T \mathbf{K}_0 \boldsymbol{\varphi} + \mathbf{A}) \boldsymbol{\varphi}^T \mathbf{M}_0 - \mathbf{K}_0 \boldsymbol{\varphi} \boldsymbol{\varphi}^T \mathbf{M}_0 \quad (6.6-47)$$

Berman 法的优点是, 不使用 EMA 完整模态集, 且不需要 FEM 计算 \mathbf{A}_0 、 $\boldsymbol{\varphi}_0$ 。但是, 求得的 $\Delta \mathbf{M}$ 一般为满阵, 不再保持带状稀疏性。为了使用 FEM 进行再分析, 希望能得到保持带状稀疏性的 $\Delta \mathbf{M}$, 可以令 $\Delta \mathbf{M}$ 中落在 \mathbf{M}_0 带宽以外的元素为零, 用迭代法求在指定精度下满足正交条件式(6.6-26)的 \mathbf{M} 。与此同时, Kabe 引入关联性的概念, 提出了另一种保持原模型带状稀疏性的方法。其基本思想是, 只修改原物理阵中非零元素, 零元素仍保持为零。

例 考虑一左端有固定支撑的长为 600 mm、直径为 30 mm 的圆截面悬臂梁, 在其上三个等间隔的位置处各有一个 0.1 kg 重的集中质量块(图 6.6-1a)。现用 Berman 法修正其物理参数矩阵。首先用实验模态分析法识别出前 9 阶模态(为简单起见, 此处采用了模拟数据)如

表 6.6-1, 建立该结构的有限元模型(图 6.6-1b)。其三个结点 K_2 、 K_3 和 K_4 与集中质量块位置重合。现假设在建模时出于某种原因没有考虑三个集中质量块的影响。初始有限元模型的质量和刚度矩阵的对角元素见表 6.6-2 上部。如此建立的有限元模型显然是不准确的。

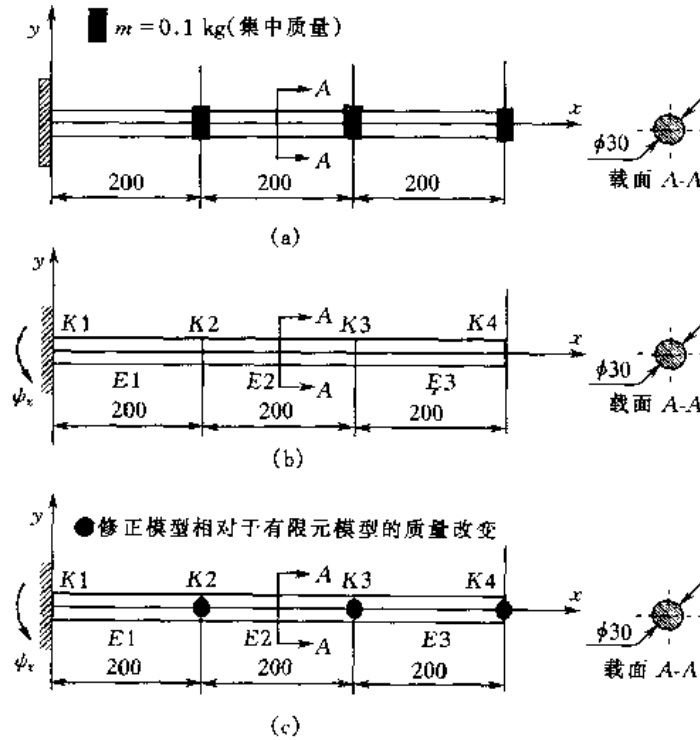


图 6.6-1 悬臂梁物理参数修改

(a) 实际结构; (b) 有限元模型; (c) 修正后的有限元模型

表 6.6-1 由模态试验识别出的固有频率 ($f_n = \omega_n / 2\pi$)

模态	固有频率(Hz)	振型	模态	固有频率(Hz)	振型	模态	固有频率(Hz)	振型
1	$f_{e1} = 67.118$	一弯曲	4	$f_{e4} = 2\,462.3$	一拉伸	7	$f_{e7} = 7\,864.8$	二拉伸
2	$f_{e2} = 417.98$	二弯曲	5	$f_{e5} = 2\,733.3$	四弯曲	8	$f_{e8} = 9\,318.4$	六弯曲
3	$f_{e3} = 1\,159.1$	三弯曲	6	$f_{e6} = 5\,033.6$	五弯曲	9	$f_{e9} = 13\,532$	三拉伸

在用模态实验结果对初始有限元模型修正后,得到了图 6.6-1c 所示的修正模型。表 6.6-2 的中部是质量和刚度矩阵对角元素数据。表 6.6-2 下部为结构矩阵对角元素的修正量。可以看出,修正后的质量矩阵中相应于集中质量块作用处,所有代表平动自由度的对角元素大约增加了 0.1 kg,这正好是集中质量块的质量。

一般情况下,要从模态实验数据中识别出如此众多和准确的振动模态是比较困难的,因此修正的结果也就难以这么理想。但无论如何,修正后的模型总要比初始有限元模型准确可靠,且随着投入使用的实验模态阶数的增加,修正的结果亦趋于准确。图 6.6-2 给出修正后的模型误差与投入使用的实验模态阶数之间的关系。横坐标是用于修正的实验模态数(由最低阶振动模态算起),值为零时对应于初始有限元模型。纵坐标是修正后质量矩阵中代表平动自由度的对角元素的相对误差,其值由初始有限元模型的 22% 逐渐降低到接近 0。计算结果还表明,投入使用的弯曲模态只能使结构矩阵中与该模态有关的自由度得到修正,它对于拉伸方向的自由度则不产生任何影响。反之亦然,这也进一步验证了各模态之间的正交性。

表 6.6-2 各模型质量和刚度矩阵的对角元素

结点		质量矩阵			刚度矩阵		
		x 自由度	y 自由度	ϕ_z 自由度	x 自由度	y 自由度	ϕ_z 自由度
初始模型	K_1	0.368	0.410	4.20	$0.100 \times 10^{31} *$	$0.100 \times 10^{31} *$	$0.100 \times 10^{31} *$
	K_2	0.735	0.819	8.40	0.212×10^{10}	0.358×10^8	0.477×10^{10}
	K_3	0.735	0.819	8.40	0.212×10^{10}	0.358×10^8	0.477×10^{10}
	K_4	0.368	0.410	4.20	0.106×10^{10}	0.179×10^8	0.239×10^{10}
修正模型	K_1	0.368	0.410	4.20	$0.100 \times 10^{31} *$	$0.100 \times 10^{31} *$	$0.100 \times 10^{31} *$
	K_2	0.836	0.919	8.43	0.212×10^{10}	0.358×10^8	0.478×10^{10}
	K_3	0.835	0.921	8.43	0.212×10^{10}	0.357×10^8	0.478×10^{10}
	K_4	0.467	0.511	4.21	0.106×10^{10}	0.179×10^8	0.239×10^{10}
元素改变	K_1	0.000	0.000	0.00	$0.000 \times 10^{31} *$	$0.000 \times 10^{31} *$	$0.000 \times 10^{31} *$
	K_2	0.101	0.100	0.03	0.000×10^{10}	0.000×10^8	0.001×10^{10}
	K_3	0.100	0.102	0.03	0.000×10^{10}	0.001×10^8	0.001×10^{10}
	K_4	0.099	0.101	0.01	0.000×10^{10}	0.0008×10^8	0.000×10^{10}

* 表示施加的约束。

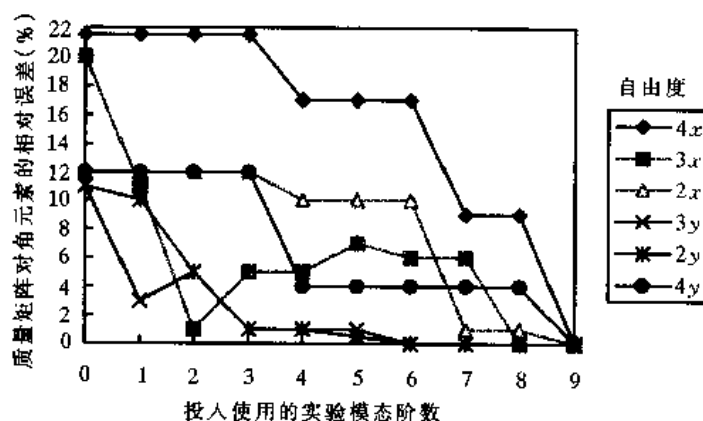


图 6.6-2 修正模型的误差与投入使用的实验模态个数之间的关系

6.6.4 物理参数修改之三——特征灵敏度法

设 F 是 p_m 的函数,且 p_m 的改变量 Δp_m 为小量,则 F 对 p_m 的一阶差分灵敏度与一阶微分灵敏度近似相等,即

$$\frac{\Delta F}{\Delta p_m} = \frac{\partial F}{\partial p_m} \quad (6.6-48)$$

则

$$\Delta F = \frac{\partial F}{\partial p_m} \Delta p_m \quad (6.6-49)$$

显然,若已知 ΔF 和 $\frac{\partial F}{\partial p_m}$,则可求出 Δp_m 。

假如 ΔF 表示结构 EMA 与 FEM 模型特征参量(特征值、特征矢量)之差, Δp_m 表示结构

EMA 与 FEM 模型物理参量(质量、刚度、阻尼)之差, $\frac{\partial F}{\partial p_m}$ 表示特征灵敏度, 则

$$\Delta F, \frac{\partial F}{\partial p_m} \xrightarrow{\text{式(6.6-49)}} \Delta p_m \quad (6.6-50)$$

这就是特征灵敏度法做物理参数修改的基本思想。

设系统为粘性阻尼系统, 自由度为 n , 由式(6.6-49)写出特征参数变化量与物理参数变化量之间的关系式

$$\begin{bmatrix} \Delta \lambda \\ \Delta \psi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \left[\frac{\partial \lambda}{\partial m} \right] & \left[\frac{\partial \lambda}{\partial k} \right] & \left[\frac{\partial \lambda}{\partial c} \right] \\ \left[\frac{\partial \psi}{\partial m} \right] & \left[\frac{\partial \psi}{\partial k} \right] & \left[\frac{\partial \psi}{\partial c} \right] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta m \\ \Delta k \\ \Delta c \end{bmatrix} = T \begin{bmatrix} \Delta m \\ \Delta k \\ \Delta c \end{bmatrix} \quad (6.6-51)$$

式中各符号的含义为

$$\Delta \lambda = [\Delta \lambda_1 \quad \Delta \lambda_2 \quad \cdots \quad \Delta \lambda_n]^T \quad (6.6-52)$$

$$\Delta \psi = [\Delta \psi_1^T \quad \Delta \psi_2^T \quad \cdots \quad \Delta \psi_n^T]^T \quad (6.6-53)$$

$$\left[\frac{\partial \lambda}{\partial m} \right] = \begin{bmatrix} \cdots \frac{\partial \lambda_1}{\partial m_{ef}} \cdots \\ \cdots \frac{\partial \lambda_2}{\partial m_{ef}} \cdots \\ \vdots \\ \cdots \frac{\partial \lambda_n}{\partial m_{ef}} \cdots \end{bmatrix}, \left[\frac{\partial \lambda}{\partial k} \right] = \begin{bmatrix} \cdots \frac{\partial \lambda_1}{\partial k_{ef}} \cdots \\ \cdots \frac{\partial \lambda_2}{\partial k_{ef}} \cdots \\ \vdots \\ \cdots \frac{\partial \lambda_n}{\partial k_{ef}} \cdots \end{bmatrix}, \left[\frac{\partial \lambda}{\partial c} \right] = \begin{bmatrix} \cdots \frac{\partial \lambda_1}{\partial c_{ef}} \cdots \\ \cdots \frac{\partial \lambda_2}{\partial c_{ef}} \cdots \\ \vdots \\ \cdots \frac{\partial \lambda_n}{\partial c_{ef}} \cdots \end{bmatrix} \quad (6.6-54)$$

$$\left[\frac{\partial \psi}{\partial m} \right] = \begin{bmatrix} \cdots \frac{\partial \psi_1}{\partial m_{ef}} \cdots \\ \cdots \frac{\partial \psi_2}{\partial m_{ef}} \cdots \\ \vdots \\ \cdots \frac{\partial \psi_n}{\partial m_{ef}} \cdots \end{bmatrix}, \left[\frac{\partial \psi}{\partial k} \right] = \begin{bmatrix} \cdots \frac{\partial \psi_1}{\partial k_{ef}} \cdots \\ \cdots \frac{\partial \psi_2}{\partial k_{ef}} \cdots \\ \vdots \\ \cdots \frac{\partial \psi_n}{\partial k_{ef}} \cdots \end{bmatrix}, \left[\frac{\partial \psi}{\partial c} \right] = \begin{bmatrix} \cdots \frac{\partial \psi_1}{\partial c_{ef}} \cdots \\ \cdots \frac{\partial \psi_2}{\partial c_{ef}} \cdots \\ \vdots \\ \cdots \frac{\partial \psi_n}{\partial c_{ef}} \cdots \end{bmatrix} \quad (6.6-55)$$

$$\Delta m = [\cdots \Delta m_{ef} \cdots]^T \quad (6.6-56)$$

$$\Delta k = [\cdots \Delta k_{ef} \cdots]^T \quad (6.6-57)$$

$$\Delta c = [\cdots \Delta c_{ef} \cdots]^T \quad (6.6-58)$$

$$T = \begin{bmatrix} \left[\frac{\partial \lambda}{\partial m} \right] & \left[\frac{\partial \lambda}{\partial k} \right] & \left[\frac{\partial \lambda}{\partial c} \right] \\ \left[\frac{\partial \psi}{\partial m} \right] & \left[\frac{\partial \psi}{\partial k} \right] & \left[\frac{\partial \psi}{\partial c} \right] \end{bmatrix} \quad (6.6-59)$$

以上诸式中 e, f 表示刚度阵、质量阵、阻尼阵的行号和列号。由于这三种矩阵为对称阵, 故角标“ ef ”表示遍取其上三角元素。

设 T 为行满秩矩阵, 则 T 的广义逆为

$$T^+ = T^H (TT^H)^{-1} \quad (6.6-60)$$

则由式(6.6-51)可求得物理参数改变量的最小二乘解

$$\begin{bmatrix} \Delta m \\ \Delta k \\ \Delta c \end{bmatrix} = T^H (T T^H)^{-1} \begin{bmatrix} \Delta \lambda \\ \Delta \psi \end{bmatrix} \quad (6.6-61)$$

讨论以下几种特例:

①对无阻尼系统, $\lambda_i = \omega_{0i}$, $\psi_i = \varphi_i$, T 列数缩减, 计算简化;

②只使用 $\Delta \lambda$ 识别 Δm 、 Δk 、 Δc , 由于振型识别精度较低, 可以只用特征值识别 Δm 、 Δk 、 Δc , 则 T 行数缩减, 计算简化;

③假设 FEM 模型 M_0 、 K_0 、 C_0 中只有对应边界条件和连接条件处的元素不准确, 对应结构主体的大部分元素是准确的, 则 Δm 、 Δk 、 Δc 中只有对应边界条件和连接条件处的元素不为零, 因此 Δm 、 Δk 、 Δc 及 T 可大大缩减, T 可能变为列满秩矩阵, 此时

$$T^+ = (T^H T)^{-1} T^H \quad (6.6-62)$$

计算大为简化;

④考虑 M_0 、 K_0 、 C_0 为带状稀疏阵, 故可只考虑对其非零元素进行修改, Δm 、 Δk 、 Δc 亦得到简化。

特征灵敏度法的优点是, 在特殊情况下较简单, 且无需物理参数矩阵, 此外, 还可识别阻尼参数的变化量。该方法允许使用非完整模态集, 但特征灵敏度的精度因模态截断将受到影响。

6.6.5 物理参数修改的其他主要方法

1. Kabe 法

设

$$M = M_0, K = K_0 \odot \gamma \quad (6.6-63)$$

式中, \odot 表示直积; γ 为修正矩阵。定义误差函数

$$\varepsilon = \|\hat{I} - \hat{I} \odot \gamma\| \quad \begin{cases} (\hat{I})_{ij} = 1 & \text{当 } (K_0)_{ij} \neq 0 \\ (\hat{I})_{ij} = 0 & \text{当 } (K_0)_{ij} = 0 \end{cases} \quad (6.6-64)$$

形成约束优化问题

$$\begin{cases} \min \varepsilon \\ M\varphi\Lambda - K\varphi = 0 \\ \gamma - \gamma^T = 0 \end{cases} \quad (6.6-65)$$

由 Lagrange 乘子法, 求得修改刚度阵

$$K = K_0 - \frac{1}{4} K_0 \odot K_0 \odot (L\varphi^T + \varphi L^T) \quad (6.6-66)$$

式中 L 为 Lagrange 乘子矩阵。

Kabe 法的主要特点是引入了关联性概念, 后来为多种方法所借鉴。

2. 最佳矩阵逼近法

对实测模态矩阵 φ 进行奇异值分解, 即

$$\varphi = U \begin{bmatrix} D \\ 0 \end{bmatrix} V^T \quad (6.6-67)$$

式中 U 、 V 分别为 $n \times n$ 、 $m \times m$ 阶正交阵, $D = \text{diag} [\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m]$ 。

令

$$\begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{21} & K_{22} \end{bmatrix} = U^T K U, \begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{bmatrix} = U^T M U \quad (6.6-68)$$

$$\begin{bmatrix} K_{011} & K_{012} \\ K_{021} & K_{022} \end{bmatrix} = U^T K_0 U, \begin{bmatrix} M_{011} & M_{012} \\ M_{021} & M_{022} \end{bmatrix} = U^T M_0 U \quad (6.6-69)$$

定义误差范数

$$\varepsilon = \|K - K_0\|_F^2 + \|M - M_0\|_F^2 \quad (6.6-70)$$

$\|\cdot\|_F$ 表示范数。求在下述条件下的最优化问题

$$\begin{cases} K\varphi = M\varphi\Lambda \\ \varphi^T M\varphi = I_m \\ \varphi^T K\varphi = \Lambda \end{cases} \quad (6.6-71)$$

得最佳逼近矩阵

$$M = U \begin{bmatrix} D^{-2} & M_{21}^T \\ M_{21} & M_{022} \end{bmatrix} U^T \quad (6.6-72)$$

$$M = U \begin{bmatrix} K_{11} & A^T M_{21}^T \\ M_{21} A & K_{022} \end{bmatrix} U^T \quad (6.6-73)$$

式中

$$A = D V^T \Lambda V D^{-1}, K_{11} = D^{-1} V^T \Lambda V D^{-1} \quad (6.6-74)$$

$$M_{21} = (K_{021} A^T + M_{021})(I_m + A A^T)^{-1} \quad (6.6-75)$$

该方法引入奇异值分解技术,使计算量减小、识别精度提高。

3. 基于建模误差位置识别的有限元模型修正法

该方法分两步。首先通过求整体物理参数修改矩阵,并引入关联性使之保持对称、稀疏性,由此确定误差较大区域,然后由设计参数法精确修正。该方法的特点是修改方向明确。

设修正后物理参数矩阵为

$$\begin{cases} M = M_0 + \Delta M \\ K = K_0 + \Delta K \end{cases} \quad (6.6-76)$$

FEM 计算特征对为 φ_0, Λ_0 , EMA 实测特征对为 φ, Λ 。其中 φ_0, φ 为 $n \times m$ 阶矩阵, Λ_0, Λ 为 m 阶方阵,它们满足特征解方程和正交关系

$$\left. \begin{aligned} K_0 \varphi_0 - M_0 \varphi_0 \Lambda_0 &= 0 \\ \varphi_0^T K_0 \varphi_0 &= \Lambda_0 \\ \varphi_0^T M_0 \varphi_0 &= I \end{aligned} \right\} \quad (6.6-77)$$

$$\left. \begin{aligned} K\varphi - M\varphi\Lambda &= 0 \\ \varphi^T K\varphi &= \Lambda \\ \varphi^T M\varphi &= I \end{aligned} \right\} \quad (6.6-78)$$

由此得到

$$\begin{cases} \Delta M = M_0 (\varphi_0 \varphi_0^T - \varphi \varphi^T) M_0 \\ \Delta K = K_0 (\varphi_0 \Lambda_0^{-1} \varphi_0^T - \varphi \Lambda^{-1} \varphi^T) K_0 \end{cases} \quad (6.6-79)$$

引入对称、带状稀疏约束条件,有

$$\left. \begin{aligned} \Delta \mathbf{M} &= \frac{1}{2} (\Delta \mathbf{M} + \Delta \mathbf{M}^T) \odot \mathbf{N}_M \\ \Delta \mathbf{K} &= \frac{1}{2} (\Delta \mathbf{K} + \Delta \mathbf{K}^T) \odot \mathbf{N}_K \end{aligned} \right\} \quad (6.6-80)$$

式中 \odot 表示 Hadamard 积,且

$$(\mathbf{N}_D)_y = \begin{cases} 0 & \text{当 } (\mathbf{D}_0)_y = 0 \\ 1 & \text{当 } (\mathbf{D}_0)_y \neq 0 \end{cases}$$

这里角标 $D = M$ 或 K , $\mathbf{D}_0 = \mathbf{M}_0$ 或 \mathbf{K}_0 。定义误差百分比

$$\left. \begin{aligned} e_i^M &= \frac{|\Delta M_i / M_{0i}|}{|\Delta M_i / M_{0i}|_{\max} + |\Delta M_i / M_{0i}|_{\min}} \times 100\% \\ e_i^K &= \frac{|\Delta K_i / K_{0i}|}{|\Delta K_i / K_{0i}|_{\max} + |\Delta K_i / K_{0i}|_{\min}} \times 100\% \end{aligned} \right\} \quad (6.6-81)$$

式中 $\Delta M_i, \Delta K_i$ 为 $\Delta \mathbf{M}, \Delta \mathbf{K}$ 中对应测点的对角元素, M_{0i}, K_{0i} 为 $\mathbf{M}_0, \mathbf{K}_0$ 中相应的对角元素。由此式可判断出建模误差范围。

设共有 p 个单元的质量阵和 q 个单元的刚度阵需要进一步修正,将式(6.6-76)写成:

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{M} &= \mathbf{M}_0 + \sum_{e=1}^p \alpha_e^M \mathbf{M}_e \\ \mathbf{K} &= \mathbf{K}_0 + \sum_{e=1}^q \alpha_e^K \mathbf{K}_e \end{aligned} \right\} \quad (6.6-82)$$

式中 $\mathbf{M}_e, \mathbf{K}_e$ 为第 e 个单元经扩阶的质量阵和刚度阵。上式代入特征解方程和正交条件式(6.6-78),得关于待修正参数 α_e, β_e 的线性代数方程组

$$\mathbf{A} \boldsymbol{\alpha} = \mathbf{a} \quad (6.6-83)$$

可求得 $\boldsymbol{\alpha}$ 的极小最小二乘解

$$\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{A}^+ \mathbf{a} \quad (6.6-84)$$

式中 $\boldsymbol{\alpha} = [\alpha_1^M \quad \alpha_2^M \quad \cdots \quad \alpha_p^M \quad \alpha_1^K \quad \alpha_2^K \quad \cdots \quad \alpha_q^K]^T$ 。

4. 物理参数修改的频响函数法

利用实测频响函数修改物理参数有以下优点:①无需模态参数;②减少模态截断带来的误差;③能保持原有自由度和带状稀疏性。

设

$$\mathbf{M} = \mathbf{M}_0 + \sum_{e=1}^N \alpha_e \mathbf{M}_e, \mathbf{C} = \mathbf{C}_0 + \sum_{e=1}^N \beta_e \mathbf{C}_e, \mathbf{K} = \mathbf{K}_0 + \sum_{e=1}^N \gamma_e \mathbf{K}_e \quad (6.6-85)$$

N 为待修正子结构(或单元)的个数, $\alpha_e, \beta_e, \gamma_e$ 为误差因子。

系统的真实频响函数 $\mathbf{H}(\omega)_{n \times n}$ 或阻抗矩阵 $\mathbf{Z}(\omega)_{n \times n}$ 为

$$\begin{aligned} \mathbf{H}(\omega) &= (-\omega^2 \mathbf{M} + j\omega \mathbf{C} + \mathbf{K})^{-1} \\ \mathbf{Z}(\omega) &= \mathbf{H}^{-1}(\omega) = \mathbf{Z}_0(\omega) + \Delta \mathbf{Z}(\omega) \end{aligned} \quad (6.6-86)$$

式中

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{Z}_0(\omega) &= -\omega^2 \mathbf{M}_0 + j\omega \mathbf{C}_0 + \mathbf{K}_0 \\ \Delta \mathbf{Z}(\omega) &= -\omega^2 \sum_{e=1}^N \alpha_e \mathbf{M}_e + j\omega \sum_{e=1}^N \beta_e \mathbf{C}_e + \sum_{e=1}^N \gamma_e \mathbf{K}_e \end{aligned} \right\} \quad (6.6-87)$$

将模型自由度 $x_{n \times 1}$ 划分为测量自由度 $y_{m \times 1}$ 和非测量自由度 $z_{r \times 1}$, $m + r = n$, 则有

$$x = P \begin{bmatrix} y \\ z \end{bmatrix} = [P_1 \quad P_2] \begin{bmatrix} y \\ z \end{bmatrix} \quad (6.6-88)$$

式中 $P_{n \times n} = [P_1 \quad P_2]$ 是坐标变换矩阵, $P^T P = I$ 。由 $Z(\omega)H(\omega) = I$ 可得

$$P^T Z(\omega) P P^T H(\omega) P = I \quad (6.6-89)$$

展开得

$$\left. \begin{aligned} H_{mm}^{-1}(\omega) &= Z_{mm}(\omega) - Z_{rm}^T(\omega) Z_{rr}^{-1}(\omega) Z_{rm}(\omega) \\ H_{mm}(\omega) &= P_1^T H(\omega) P_1, Z_{mm}(\omega) = P_1^T Z(\omega) P_1 \\ Z_{rm}(\omega) &= P_2^T Z(\omega) P_1, Z_{rm}(\omega) = P_2^T Z(\omega) P_1 \end{aligned} \right\} \quad (6.6-90)$$

设激励点自由度 $u_{p \times 1} = Q_{p \times m} y_{m \times 1}$ ($p \leq m$), Q 为坐标变换矩阵, 对应测量自由度频响应数矩阵为 $\tilde{H}(\omega)_{m \times p}$, 则

$$H_{mm}(\omega) Q^T = \tilde{H}(\omega) \quad (6.6-91)$$

式中 $H_{mm}(\omega)$ 是误差因子 $\alpha_e, \beta_e, \gamma_e$ 的函数。

设采样点号 $k = 1, 2, \dots, s$, 定义最优化目标函数

$$J = \sum_{k=1}^s W(\omega_k) \| H_{mm}(\omega_k) Q^T - \tilde{H}(\omega_k) \|_F^2 \quad (6.6-92)$$

$W(\omega_k)$ 是加权系数。使 J 最小化得关于 $\alpha_e, \beta_e, \gamma_e$ 的非线性方程组

$$f(\alpha_e, \beta_e, \gamma_e) = 0 \quad (6.6-93)$$

对 $Z_{rr}(\omega_k)$ 做 Choleski 分解可以降低式(6.6-90)中求 $Z_{rr}^{-1}(\omega_k)$ 的计算量。当结构自由度很多时, 可采用 IRS 法对系统非测试自由度进行缩聚, 再利用上述方法确定误差因子。

5. 物理参数修改的神经网络法

BP 神经网络属于前馈型网络, 具有很强的非线性映射能力。BP 网络通常由输入层、输出层和若干个隐层构成, 如图 6.6-3 所示。

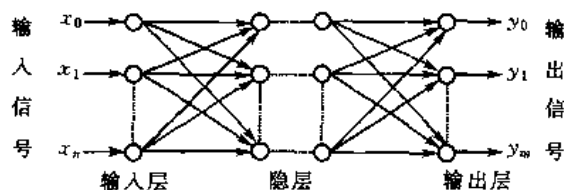


图 6.6-3 BP 神经网络结构图

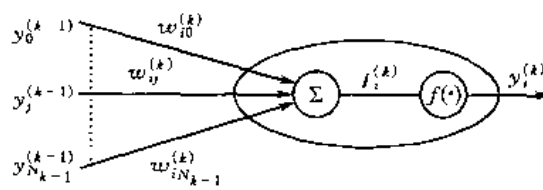


图 6.6-4 第 k 层第 i 个神经元的结构

BP 网络的第 k 层第 i 个神经元的结构如图 6.6-4 所示。其中

$$I_i^{(k)} = \sum_{j=0}^{N_k-1} w_{ij}^{(k)} y_j^{(k-1)} \quad (6.6-94)$$

$$y_i^{(k)} = f(I_i^{(k)}) \quad (6.6-95)$$

$f(\cdot)$ 为作用函数。

对于给定的总层数为 P 的 BP 神经网络, 学习样本集为 (X_l, D_l) ($l = 1, 2, \dots, S$)。网络学习的目的为求各层的权系数 $w_{ij}^{(k)}$ ($k = 1, 2, \dots, P$), 使

$$E = \sum_{l=1}^S \| D_l - Y_l \|^2 = \sum_{l=1}^S \sum_{j=1}^M (d_{lj} - y_{lj})^2 \quad (6.6-96)$$

达到最小值。其中 M 为输出层神经元的个数。

为了使 E 按网络权系数的梯度逐渐下降至最小值,网络训练采用基于梯度下降原理的 BP 算法(误差反向传播算法)。

这里以利用有限元分析法建立的无阻尼振动系统模型的修正为例,简要介绍本方法的基本原理。假设修正需要的所有激励矢量和响应矢量可由试验得到。若有些自由度的上述量无法测得,可通过自由度缩聚使假设条件成立。

利用有限元分析方法建立的系统静力学方程和动力学方程分别为

$$Kx = f \quad (6.6-97)$$

$$M\ddot{x} + Kx = F \quad (6.6-98)$$

式中, M 、 K 、 f 和 F 分别为系统的质量矩阵、刚度矩阵、静力作用矢量和动力作用矢量; \ddot{x} 、 x 分别为加速度响应和位移响应。

(1)对刚度矩阵的修正

由式(6.6-97)有如下变换

$$x = K^{-1}f = \rho f \quad (6.6-99)$$

式中 ρ 为系统的柔度矩阵。

首先利用 BP 神经网络对静力学方程进行修正。以柔度矩阵 ρ 各元素为初始权系数,以静力作用矢量 f 为输入矢量,以静力响应 x 为输出矢量,建立一两层 BP 神经网络。通过试验测得的激励响应对 (f_p, x_p) ($p=1, 2, \dots, s$) 进行学习。学习结束得到修正后的柔度矩阵,对柔度矩阵求逆得到修正后系统的刚度矩阵 K' 。

(2)对质量矩阵的修正

将修正好的刚度矩阵 K' 代入式(6.6-98)中,有

$$M\ddot{x} + K'x = F \quad (6.6-100)$$

对上式做进一步转换

$$\ddot{x} = M^{-1}(F - K'x) = QF_r \quad (6.6-101)$$

式中

$$Q = M^{-1}, F_r = F - K'x$$

利用 BP 神经网络方程式(6.6-101)中的 Q 进行修正。以矩阵 Q 各元素为初始权系数,以作用力矢量 F_r 为输入矢量,以加速度响应 \ddot{x} 为输出矢量,建立一两层 BP 神经网络。通过试验测得的激励响应对 (F_{rp}, \ddot{x}_p) ($p=1, 2, \dots, q$) 进行学习。学习结束得到修正后的 Q' 矩阵,对 Q' 矩阵求逆得到修正后系统的刚度矩阵 M' 。

6.7 物理参数识别

物理参数识别是指仅从 EMA 结果识别物理参数 M 、 K 、 C 。许多文献将上节介绍的物理参数修改亦称为物理参数识别。从广义角度来讲,这种说法并无问题。本书将物理参数修改与物理参数识别区分开来,原因是前者必须基于 FEM 模型,而后者则不需要。因此,此处所指的物理参数识别是一个实验建模问题,而非综合建模。

物理参数识别的方法分为三类:①基于激励谱和响应谱的方法,有最小二乘法、基础激振

法、辅助变量法等方法；②基于频响函数的方法；③基于模态参数的方法，如直接识别法、特征值反问题等方法。本节重点介绍第三类方法。

6.7.1 直接识别法

设由 EMA 已获得实模态系统的完整模态集 $\boldsymbol{\varphi}$ 及模态参数 m_i, k_i, c_i ，由式(1.4-11)、式(1.4-12)和式(1.4-47)得

$$\mathbf{M} = \boldsymbol{\varphi}^{-\top} \text{diag}[m_i] \boldsymbol{\varphi}^{-1} \quad (6.7-1)$$

$$\mathbf{K} = \boldsymbol{\varphi}^{-\top} \text{diag}[k_i] \boldsymbol{\varphi}^{-1} \quad (6.7-2)$$

$$\mathbf{C} = \boldsymbol{\varphi}^{-\top} \text{diag}[c_i] \boldsymbol{\varphi}^{-1} \quad (6.7-3)$$

$\mathbf{M}, \mathbf{K}, \mathbf{C}$ 一般不具备带状稀疏性。若 \mathbf{M} 已知，由式(6.7-1)求得 $\boldsymbol{\varphi}^{-1}$ ，代入式(6.7-2)和式(6.7-3)，得不含 $\boldsymbol{\varphi}^{-1}$ 的 \mathbf{K}, \mathbf{C} 表达式。

对粘性阻尼系统，在 \mathbf{M} 已知情况下，由复模态参数可直接识别出物理参数 \mathbf{K} 和 \mathbf{C} ，原理如下。

由式(1.5-19)，有

$$\boldsymbol{\psi}'^{-1} = \text{diag}\left[\frac{1}{a_i}, \frac{1}{a_i^*}\right] \boldsymbol{\psi}'^{\top} \mathbf{P} \quad (6.7-4)$$

对应第 i 个特征对的特征解方程式(1.4-43)为

$$(\lambda_i^2 \mathbf{M} + \lambda_i \mathbf{C} + \mathbf{K}) \boldsymbol{\psi}_i = \mathbf{0} \quad (6.7-5)$$

可写成

$$[\mathbf{K} \quad \mathbf{C}] \begin{bmatrix} \boldsymbol{\psi}_i \\ \lambda_i \boldsymbol{\psi}_i \end{bmatrix} = -\mathbf{M} \boldsymbol{\psi}_i \lambda_i^2 \quad (6.7-6)$$

其共轭形式为

$$[\mathbf{K} \quad \mathbf{C}] \begin{bmatrix} \boldsymbol{\psi}_i^* \\ \lambda_i^* \boldsymbol{\psi}_i^* \end{bmatrix} = -\mathbf{M} \boldsymbol{\psi}_i^* \lambda_i^{*2} \quad (6.7-7)$$

以上二式两边左乘 \mathbf{M}^{-1} ，写成矩阵形式，有

$$[\mathbf{M}^{-1} \mathbf{K} \quad \mathbf{M}^{-1} \mathbf{C}] \boldsymbol{\psi}' = -[\boldsymbol{\psi} \boldsymbol{\Lambda}^2 \quad \boldsymbol{\psi}^* \boldsymbol{\Lambda}^{*2}] \quad (6.7-8)$$

上式右乘 $\boldsymbol{\psi}'^{-1}$ ，将式(6.7-4)代入得

$$[\mathbf{M}^{-1} \mathbf{K} \quad \mathbf{M}^{-1} \mathbf{C}] = -[\boldsymbol{\psi} \boldsymbol{\Lambda}^2 \quad \boldsymbol{\psi}^* \boldsymbol{\Lambda}^{*2}] \text{diag}\left[\frac{1}{a_i}, \frac{1}{a_i^*}\right] \begin{bmatrix} \boldsymbol{\psi} & \boldsymbol{\psi}^* \\ \boldsymbol{\psi} \boldsymbol{\Lambda} & \boldsymbol{\psi}^* \boldsymbol{\Lambda}^* \end{bmatrix}^{\top} \begin{bmatrix} \mathbf{C} & \mathbf{M} \\ \mathbf{M} & \mathbf{0} \end{bmatrix}$$

展开得

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{M}^{-1} \mathbf{C} &= \mathbf{A} \mathbf{M} \\ \mathbf{M}^{-1} \mathbf{K} &= \mathbf{A} \mathbf{C} + \mathbf{B} \mathbf{M} \end{aligned} \right\} \quad (6.7-9)$$

从而

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{C} &= \mathbf{M} \mathbf{A} \mathbf{M} \\ \mathbf{K} &= \mathbf{M} \mathbf{A} \mathbf{C} + \mathbf{M} \mathbf{B} \mathbf{M} \end{aligned} \right\} \quad (6.7-10)$$

式中

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{A} &= -\text{Re}\left(\boldsymbol{\psi} \boldsymbol{\Lambda}^2 \text{diag}\left[\frac{1}{a_i}\right] \boldsymbol{\psi}^{\top}\right) \\ \mathbf{B} &= -\text{Re}\left(\boldsymbol{\psi} \boldsymbol{\Lambda}^3 \text{diag}\left[\frac{1}{a_i}\right] \boldsymbol{\psi}^{\top}\right) \end{aligned} \right\} \quad (6.7-11)$$

在上面推导中使用了完整模态集。从结果看,该方法允许使用非完整模态集。

6.7.2 特征值反问题的矩阵递推法

有两种方法:由特征值求物理参数;由特征值和特征矢量求物理参数。两种方法均无需模态参数 m_i, k_i, c_i 。

特征值反问题是数学和力学中一类重要的问题,对这类问题的研究包括解的存在性、惟一性、稳定性及各种求解方法,涉及大量数学问题。本节只介绍离散系统求解特征值反问题的矩阵递推法。

1. 两自由度系统

假设系统物理模型如图 6.7-1(a)所示,其质量阵和刚度阵为

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix}, \mathbf{K} = \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 \end{bmatrix}$$

其广义特征值问题为

$$\lambda \mathbf{M} \mathbf{X} = \mathbf{K} \mathbf{X} \quad (6.7-12)$$

(1) 由特征值求物理参数

式(6.7-12)的特征方程为

$$|\mathbf{K} - \lambda \mathbf{M}| = m_1 m_2 \lambda^2 - [m_2(k_1 + k_2) + m_1 k_2] \lambda + k_1 k_2 = 0 \quad (6.7-13)$$

其根 λ_1, λ_2 有如下关系

$$\lambda_1 + \lambda_2 = \frac{k_1 + k_2}{m_1} + \frac{k_2}{m_2} \quad (6.7-14)$$

$$\lambda_1 \lambda_2 = \frac{k_1 k_2}{m_1 m_2} \quad (6.7-15)$$

若已知 λ_1, λ_2 , 由以上二式尚不能求出 m_1, m_2, k_1, k_2 四个参数,需补充方程。处理方式有两种:①加刚性约束,如将 m_2 固定(如图 6.7-1(b)所示),建立新系统特征根与物理参数的关系作为补充方程;②加弹性约束(如图 6.7-1(c)所示),处理方法同①。

以加刚性约束为例介绍这种方法。易知加刚性约束后系统的特征值为

$$\lambda_1^0 = \frac{k_1 + k_2}{m_1} \quad (6.7-16)$$

可以证明

$$0 < \lambda_1 < \lambda_1^0 < \lambda_2$$

式(6.7-16)即补充方程,与式(6.7-14)、式(6.7-15)联立,可求得

$$\left. \begin{aligned} \frac{k_2}{m_2} &= \lambda_1 + \lambda_2 - \lambda_1^0 \\ \frac{k_1}{m_2} &= \frac{\lambda_1 \lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2 - \lambda_1^0} \\ \frac{k_2}{m_1} &= \frac{(\lambda_1^0 - \lambda_1)(\lambda_2 - \lambda_1^0)}{\lambda_1 + \lambda_2 - \lambda_1^0} \end{aligned} \right\} \quad (6.7-17)$$

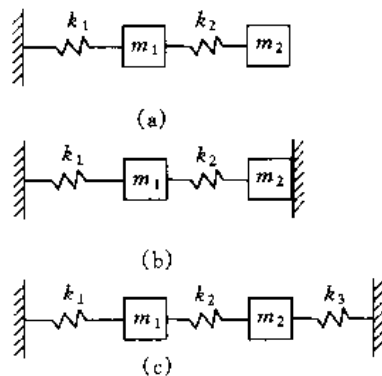


图 6.7-1 两自由度无阻尼系统
(a)原系统;(b)加刚性约束;
(c)加弹性约束

上式惟一确定了 m_1, m_2, k_1, k_2 之间的比例关系, 假设其中任一参数已知(实测或计算得到), 则可求出其余参数。

(2) 由特征值和特征矢量求物理参数

不通过特征方程建立特征值与物理参数的关系, 而是由式(6.7-12)直接建立特征值、特征矢量与物理参数的关系, 可得到与式(6.7-17)类似的结果。

将广义特征值问题(6.7-12)写成标准特征值问题

$$DX = \lambda X \quad (6.7-18)$$

式中

$$D = M^{-1}K \quad (6.7-19)$$

展开, 得

$$D = \begin{bmatrix} a_1 & -b \\ -c & a_2 \end{bmatrix} \quad (6.7-20)$$

式中

$$a_1 = \frac{k_1 + k_2}{m_1}, \quad b = \frac{k_2}{m_1}, \quad c = \frac{k_2}{m_2}, \quad a_2 = \frac{k_2}{m_2} \quad (6.7-21)$$

设已知特征对 $\lambda_1, \varphi_1, \lambda_2, \varphi_2$, 它们满足式(6.7-18)

$$D\varphi_1 = \lambda_1 \varphi_1 \quad (6.7-22)$$

$$D\varphi_2 = \lambda_2 \varphi_2 \quad (6.7-23)$$

或写成矩阵形式

$$D\varphi = \varphi\Lambda \quad (6.7-24)$$

式中

$$\varphi = [\varphi_1 \quad \varphi_2], \quad \Lambda = \text{diag}[\lambda_1, \lambda_2] \quad (6.7-25)$$

则

$$D = \varphi\Lambda\varphi^{-1} \quad (6.7-26)$$

再由式(6.7-21)确定 $\frac{k_1}{m_1}, \frac{k_2}{m_1}, \frac{k_2}{m_2}$ 。

与式(6.7-17)相似, 仍需已知 m_1, m_2, k_1, k_2 之一再确定其余三个。

比较上述两种方法, 由特征值和特征矢量求物理参数的方法简单。下面对多自由度系统, 只介绍此种方法。

2. 多自由度系统

任何多自由度系统的特征值问题均可用式(6.7-12)表示, 标准特征值问题仍可写成式(6.7-18)形式, $D = M^{-1}K$ 可由式(6.7-26)求出。不过, 在一般情况下, 由 D 再求 M, K 是困难的。

如果选择适当的振动模型(物理模型), 使 M, K 简化, 从而 D 亦简化, 可以从 D 中将 M, K 分离出(严格讲, 仍是确定物理参数之间的比例关系)。最简单的振动模型如图 6.7-2 所示。

该振动系统的质量阵和刚度阵为

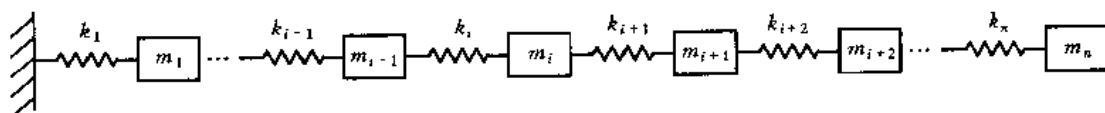


图 6.7-2 多自由度无阻尼系统

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} m_1 & & & \\ & m_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & m_n \end{bmatrix}, \mathbf{K} = \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 & & \\ -k_2 & k_2 + k_3 & -k_3 & \\ & -k_3 & k_3 + k_4 & \\ & & \ddots & \ddots \\ & & & k_{n-1} + k_n & -k_n \\ & & & -k_n & k_n \end{bmatrix} \quad (6.7-27)$$

\mathbf{M} 为对角阵, \mathbf{K} 为对称三对角阵, 则

$$\mathbf{D} = \mathbf{M}^{-1} \mathbf{K} = \begin{bmatrix} \frac{k_1 + k_2}{m_1} & \frac{-k_2}{m_1} & & \\ \frac{-k_2}{m_2} & \frac{k_2 + k_3}{m_2} & \frac{-k_3}{m_2} & \\ & \frac{-k_3}{m_3} & \frac{k_3 + k_4}{m_3} & \\ & & \ddots & \ddots \\ & & & \frac{k_{n-1} + k_n}{m_{n-1}} & \frac{-k_n}{m_{n-1}} \\ & & & \frac{-k_n}{m_n} & \frac{k_n}{m_n} \end{bmatrix} \quad (6.7-28)$$

或写成

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} a_1 & -b_1 & & \\ -c_1 & a_2 & -b_2 & \\ & -c_2 & a_3 & \\ & & \ddots & \ddots \\ & & & a_{n-1} & -b_{n-1} \\ & & & -c_{n-1} & a_n \end{bmatrix} \quad (6.7-29)$$

式中

$$a_i = \frac{k_i + k_{i+1}}{m_i}, \quad b_i = \frac{k_{i+1}}{m_i}, \quad c_i = \frac{k_{i+1}}{m_{i+1}}, \quad \text{且 } k_{n+1} = 0, \quad b_n = c_n = 0 \quad (6.7-30)$$

$$(i = 1, 2, \dots, n)$$

若已知 \mathbf{A} 、 $\boldsymbol{\varphi}$, 且 $\boldsymbol{\varphi}$ 是在图 6.7-2 所示模型意义下的模态矩阵, 可由式(6.7-26)求得三对角阵 \mathbf{D} , 再利用递推关系式(6.7-30)求各物理参数。具体步骤如下:

① 设 m_1 已知, 由 a_1 、 b_1 求 k_1 、 k_2 。

$$k_2 = m_1 b_1, \quad k_1 = m_1 a_1 - k_2 = m_1 (a_1 - b_1) \quad (6.7-31)$$

② 由 c_1 、 b_2 求 m_2 、 k_3 。

$$m_2 = \frac{k_2}{c_1} = m_1 \frac{b_1}{c_1}, k_3 = m_2 b_2 = m_1 \frac{b_1}{c_1} b_2$$

③由 c_{i-1} 、 b_i 求 m_i 、 k_{i+1} 。

$$m_i = \frac{k_i}{c_{i-1}} = m_1 \prod_{j=1}^{i-1} \frac{b_j}{c_j}, k_{i+1} = m_i b_i = m_1 b_i \prod_{j=1}^{i-1} \frac{b_j}{c_j} \quad (6.7-32)$$

④由 c_{n-2} 、 b_{n-1} 求 m_{n-1} 、 k_n 。

$$m_{n-1} = \frac{k_{n-1}}{c_{n-2}} = m_1 \prod_{j=1}^{n-2} \frac{b_j}{c_j}, k_n = m_{n-1} b_{n-1} = m_1 b_{n-1} \prod_{j=1}^{n-2} \frac{b_j}{c_j}$$

⑤由 a_n 求 m_n 。

$$m_n = \frac{k_n}{a_n} = m_1 \frac{b_{n-1}}{a_n} \prod_{j=1}^{n-2} \frac{b_j}{c_j} \quad (6.7-33)$$

另外指出,式(6.7-29)表示的三对角阵 D 可经相似变换转化为对称三对角阵 J (Jacobi 矩阵)。选取变换矩阵

$$P = \text{diag}[1, \rho_1, \rho_2, \dots, \rho_{n-1}] \quad (6.7-34)$$

式中

$$\rho_i = \left(\frac{c_1 c_2 \cdots c_i}{b_1 b_2 \cdots b_i} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (i = 1, 2, \dots, n-1) \quad (6.7-35)$$

做变换

$$X = PY \quad (6.7-36)$$

代入式(6.7-18),得

$$JY = \lambda Y \quad (6.7-37)$$

式中

$$J = P^{-1} D P \quad (6.7-38)$$

为对称三对角阵。上式为相似变换, J 与 D 具有相同的特征值,但特征矢量不同,其特征矢量的关系由式(6.7-36)确定。对称三对角阵的特征值反问题有许多文献论述,仅由特征值或由特征对均可求物理参数矩阵。

6.7.3 实例

考虑图 6.7-2 中 5 自由度系统,物理参数为: $m_1 = 3 \text{ kg}$, $m_2 = 1 \text{ kg}$, $m_3 = 2.5 \text{ kg}$, $m_4 = 3.5 \text{ kg}$, $m_5 = 2 \text{ kg}$, $k_1 = 800 \text{ N/m}$, $k_2 = 600 \text{ N/m}$, $k_3 = 700 \text{ N/m}$, $k_4 = 500 \text{ N/m}$, $k_5 = 650 \text{ N/m}$, 其精确特征值和特征矢量矩阵为

$$A = \begin{bmatrix} 1584.2 & & & & \\ & 448.1 & & & \\ & & 220.5 & & \\ & & & 21.4 & \\ & & & & 629.2 \end{bmatrix}$$

$$\varphi = \begin{bmatrix} -0.1715 & 0.6617 & -0.4494 & 0.1312 & 0.2544 \\ 0.9552 & 0.0735 & -0.5860 & 0.2953 & -0.2081 \\ -0.2446 & -0.4950 & -0.4981 & 0.4432 & -0.3925 \\ 0.0293 & -0.1908 & 0.1615 & 0.5864 & 0.5891 \\ -0.0075 & 0.5043 & 0.4624 & 0.6094 & -0.6175 \end{bmatrix}$$

今在特征值和特征矢量中分别加入 3% 和 10% 的随机误差。假设 m_1 已知, 利用矩阵逆推法识别出各质量和刚度, 如表 6.7-1。可见, 该法具有较高的识别精度。

表 6.7-1 识别质量与刚度

	m_1	m_2	m_3	m_4	m_5
识别值(kg)	3	0.975 4	2.474 2	3.427 0	2.004 4
精确值(kg)	3	1	2.5	3.5	2
相对误差(%)	0	-2.459 2	-1.033 2	-2.084 8	0.220 1
	k_1	k_2	k_3	k_4	k_5
识别值(N/m)	824.118 6	595.717 1	685.841 5	499.004 7	657.184 6
精确值(N/m)	800	600	700	500	650
相对误差(%)	3.014 8	-0.713 8	-2.022 6	-0.199 1	1.105 3

6.8 再分析

再分析的目的是根据原结构的物理参数修改量估算修改结构的模态参数, 即

$$\Delta M, \Delta K, \Delta C \longrightarrow \lambda', \psi' \quad (6.8-1)$$

所以, 再分析与物理参数修改互为逆问题。

如果是基于 FEM 模型的再分析, 则只需重新求解一遍特征值问题即可。然而, 结构动态设计中许多问题是基于 EMA 模型的再分析, 这时, 再分析变得复杂起来。人们提出多种方法解决这一问题, 每种方法都力求做到尽量简单。这些方法可按下述方式归类:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{基本方法(双模态空间分析法)} \\ \text{整体修改再分析} \left\{ \begin{array}{l} \text{小修改再分析(灵敏度法、摄动法)} \\ \text{大修改再分析(分步迭代法)} \end{array} \right. \\ \text{局部修改再分析(韦森伯格法、子结构综合法、频响函数法)} \end{array} \right.$$

其中双模态空间分析法为最基本、最通用的方法, 适用于各种修改情况下的再分析。

有时再分析的范围还扩大为求修改结构的频响函数及动力响应。下面主要介绍求模态参数的再分析。

6.8.1 基本方法——双模态空间分析法

设原结构物理参数矩阵为 M 、 K 、 C , 对应修改量为 ΔM 、 ΔK 、 ΔC , 且仍保持对称性。修改后结构在物理坐标系中的振动方程为

$$(M + \Delta M)\ddot{x} + (C + \Delta C)\dot{x} + (K + \Delta K)x = f \quad (6.8-2)$$

设结构为粘性比例阻尼系统, 原结构模态矩阵 φ 记为 φ_1 , 做坐标变换

$$x = \varphi_I y \quad (6.8-3)$$

φ_I 各列构成模态坐标系 I 的完备正交基, y 为结构各点在此坐标系下的向量。上式代入式 (6.8-2), 并左乘 φ_I^T , 考虑 φ_I 关于 M 、 K 、 C 的正交性

$$\left. \begin{aligned} \varphi_I^T M \varphi_I &= \text{diag}[m_i] \\ \varphi_I^T K \varphi_I &= \text{diag}[k_i] \\ \varphi_I^T C \varphi_I &= \text{diag}[c_i] \end{aligned} \right\} \quad (6.8-4)$$

得

$$M_I \ddot{y} + C_I \dot{y} + K_I y = \varphi_I^T f \quad (6.8-5)$$

式中

$$\left. \begin{aligned} M_I &= \text{diag}[m_i] + \varphi_I^T \Delta M \varphi_I \\ K_I &= \text{diag}[k_i] + \varphi_I^T \Delta K \varphi_I \\ C_I &= \text{diag}[c_i] + \varphi_I^T \Delta C \varphi_I \end{aligned} \right\} \quad (6.8-6)$$

M_I 、 K_I 、 C_I 一般为非对角阵, 但仍为对称矩阵, 故仍可通过坐标变换将式 (6.8-5) 解耦。求解式 (6.8-5) 特征值问题

$$(\lambda^2 M_I - \lambda C_I + K_I) Y = 0 \quad (6.8-7)$$

得特征值 λ'_i 和特征向量 φ_{II} 。 φ_{II} 构成模态坐标系 II 的完备正交基, 模态矩阵为 φ_{II} 。做变换

$$y = \varphi_{II} z \quad (6.8-8)$$

代入式 (6.8-5), 并左乘 φ_{II}^T , 可将式 (6.8-5) 解耦, 得

$$M_{II} \ddot{z} + C_{II} \dot{z} + K_{II} z = \varphi_{II}^T \varphi_I^T f \quad (6.8-9)$$

式中

$$\left. \begin{aligned} M_{II} &= \varphi_{II}^T M_I \varphi_{II} \\ K_{II} &= \varphi_{II}^T K_I \varphi_{II} \\ C_{II} &= \varphi_{II}^T C_I \varphi_{II} \end{aligned} \right\} \quad (6.8-10)$$

均为对角阵。由式 (6.8-3)、式 (6.8-8) 得

$$x = \varphi_I \varphi_{II} z = \varphi' z \quad (6.8-11)$$

式中

$$\varphi' = \varphi_I \varphi_{II} \quad (6.8-12)$$

即为修改结构的模态矩阵。

顺便指出, 求解方程式 (6.8-9) 得 z , 由式 (6.8-11) 可得修改结构的动力响应。

根据上述分析方法, 若已知原结构模态参数 m_i 、 k_i 、 c_i 、 φ , 可求得修改结构的模态参数 λ'_i 、 φ' 、 M_{II} 、 K_{II} 、 C_{II} 。

类似地, 可推导出一般粘性阻尼系统的双模态空间法。另外, 有时对结构修改还伴随自由度的增加。这种情况的再分析仍可使用双模态空间分析法。

6.8.2 整体修改再分析

1. 小修改再分析之一——灵敏度法

已知结构的特征灵敏度矩阵 T 、物理参数修改量 Δm 、 Δk 、 Δc , 由式 (6.6-51) ~ 式 (6.6-

59) 马上得到特征参数变化量 $\Delta\lambda$ 、 $\Delta\psi$ 。

2. 小修改再分析之二——摄动法

摄动法与灵敏度法的本质完全相同,只是推导方法有异。

粘性阻尼系统特征值问题

$$\lambda_i P \psi'_i + Q \psi'_i = 0 \quad (6.5-5)$$

设结构修改后物理参数

$$\begin{aligned} \mathbf{M} &= \mathbf{M}_0 + \epsilon \Delta \mathbf{M} \\ \mathbf{K} &= \mathbf{K}_0 + \epsilon \Delta \mathbf{K} \\ \mathbf{C} &= \mathbf{C}_0 + \epsilon \Delta \mathbf{C} \end{aligned} \quad (6.8-13)$$

\mathbf{M}_0 、 \mathbf{K}_0 、 \mathbf{C}_0 为原结构物理参数矩阵, $\Delta \mathbf{M}$ 、 $\Delta \mathbf{K}$ 、 $\Delta \mathbf{C}$ 为一阶小量, ϵ 为小参数标志, 则

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{P} &= \mathbf{P}_0 + \epsilon \Delta \mathbf{P} \\ \mathbf{Q} &= \mathbf{Q}_0 + \epsilon \Delta \mathbf{Q} \end{aligned} \right\} \quad (6.8-14)$$

式中

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{P}_0 &= \begin{bmatrix} \mathbf{C}_0 & \mathbf{M}_0 \\ \mathbf{M}_0 & \mathbf{0} \end{bmatrix}, \Delta \mathbf{P} = \begin{bmatrix} \Delta \mathbf{C} & \Delta \mathbf{M} \\ \Delta \mathbf{M} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \\ \mathbf{Q}_0 &= \begin{bmatrix} \mathbf{K}_0 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -\mathbf{M}_0 \end{bmatrix}, \Delta \mathbf{Q} = \begin{bmatrix} \Delta \mathbf{K} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -\Delta \mathbf{M} \end{bmatrix} \end{aligned} \right\} \quad (6.8-15)$$

将 λ_i 、 ψ'_i 按小参数 ϵ 展成幂级数

$$\left. \begin{aligned} \lambda_i &= \lambda_{i0} + \epsilon \lambda_{i1} + \epsilon^2 \lambda_{i2} + \dots \\ \psi'_i &= \psi'_{i0} + \epsilon \psi'_{i1} + \epsilon^2 \psi'_{i2} + \dots \end{aligned} \right\} \quad (6.8-16)$$

式中 λ_{i0} 、 ψ'_{i0} 为原系统特征参数, 且满足正交条件式(6.5-3)、式(6.5-4), 即

$$\psi'_{k0}{}^T \mathbf{P}_0 \psi'_{i0} = \begin{cases} 0 & (i \neq k) \\ 1 & (i = k) \end{cases} \quad (6.8-17)$$

$$\psi'_{k0}{}^T \mathbf{Q}_0 \psi'_{i0} = \begin{cases} 0 & (i \neq k) \\ -\lambda_i & (i = k) \end{cases} \quad (6.8-18)$$

将式(6.8-14)、式(6.8-16)代入式(6.5-5), 展开并令 ϵ 各次幂系数为零, 分别得, 即

$$\text{对于 } \epsilon^0 \quad \lambda_{i0} \mathbf{P}_0 \psi'_{i0} + \mathbf{Q}_0 \psi'_{i0} = \mathbf{0} \quad (6.8-19)$$

$$\text{对于 } \epsilon^1 \quad \lambda_{i0} \mathbf{P}_0 \psi'_{i1} + \mathbf{Q}_0 \psi'_{i1} + \lambda_{i0} \Delta \mathbf{P} \psi'_{i0} + \Delta \mathbf{Q} \psi'_{i0} + \lambda_{i1} \mathbf{P}_0 \psi'_{i0} = \mathbf{0} \quad (6.8-20)$$

.....

现只考虑一阶摄动。仿式(6.5-15), 将 ψ'_{i1} 按 ψ'_{i0} 展开, 即

$$\psi'_{i1} = \sum_{k=1}^n \alpha_k \psi'_{k0} \quad (6.8-21)$$

代入式(6.8-20)并考虑正交条件式(6.8-17)、式(6.8-18), 可解得

$$\lambda_{i1} = -\psi'_{i0}{}^T (\lambda_{i0} \Delta \mathbf{P} + \Delta \mathbf{Q}) \psi'_{i0} \quad (6.8-22)$$

或

$$\lambda_{i1} = -\psi'_{i0}{}^T (\lambda_{i0}^2 \Delta \mathbf{M} + \lambda_{i0} \Delta \mathbf{C} + \Delta \mathbf{K}) \psi'_{i0} \quad (6.8-23)$$

$$\alpha_k = \frac{1}{\lambda_k - \lambda_i} \psi'_{k0}{}^T (\lambda_{i0} \Delta \mathbf{P} + \Delta \mathbf{Q}) \psi'_{i0} \quad (k \neq i) \quad (6.8-24)$$

或

$$\alpha_k = \frac{1}{\lambda_k - \lambda_i} \psi_{k0}^T (\lambda_{i0}^2 \Delta \mathbf{M} + \lambda_{i0} \Delta \mathbf{C} + \Delta \mathbf{K}) \psi_{i0} \quad (k \neq i) \quad (6.8-25)$$

$$\alpha_k = -\frac{1}{2} \psi_{i0}'^T \Delta \mathbf{P} \psi_{i0}' \quad (k = i) \quad (6.8-26)$$

或

$$\alpha_k = -\frac{1}{2} \psi_{k0}^T (2\lambda_{i0} \Delta \mathbf{M} + \Delta \mathbf{C}) \psi_{i0} \quad (k = i) \quad (6.8-27)$$

式中, ψ_{i0} 为 ψ_{i0}' 的前半部分, 且由式(6.8-21)有

$$\psi_{i1}' = \sum_{k=1}^n \alpha_k \psi_{k0}' \quad (6.8-28)$$

或

$$\psi_{i1} = \sum_{k=1}^n \alpha_k \psi_{k0} \quad (6.8-29)$$

从而, 一阶摄动解为

$$\left. \begin{aligned} \lambda_i &= \lambda_{i0} + \lambda_{i1} \\ \psi_i' &= \psi_{i0}' + \psi_{i1}' \text{ 或 } \psi_i = \psi_{i0} + \psi_{i1} \end{aligned} \right\} \quad (6.8-30)$$

事实上, 由灵敏度表达式(6.5-8)、式(6.5-9)、式(6.5-16)、式(6.5-17)、式(6.5-19)、式(6.5-20)可马上得到式(6.8-22)~式(6.8-27)。

3. 大修改再分析——分步迭代法

当 Δm 、 Δk 、 Δc 或 $\Delta \mathbf{M}$ 、 $\Delta \mathbf{K}$ 、 $\Delta \mathbf{C}$ 不为小量时, 可将其分成若干小量的叠加, 每一次按小修改再分析进行计算, 通过迭代求得最后变化量 $\Delta \lambda_i$ 、 $\Delta \psi_i$ 。

6.8.3 局部修改再分析

双模态空间法对整体修改、局部修改、小修改或大修改没有任何要求, 但需求解特征值问题式(6.8-7)。实际上, 许多问题为局部修改, 所修改的物理参数矩阵中的元素仅为少数几个, 这时, 求解式(6.8-7)将大大简化。下面仅介绍韦森伯格局部修改法。另一类方法是基于频响函数修改的再分析。这种方法需对修改后的频响函数做参数识别, 如子结构综合法、频响函数法等亦在本段介绍。

1. 韦森伯格法

对 n 个自由度无阻尼系统, 假设只有刚度做局部改变, 记为

$$\Delta \mathbf{K} = \Delta k \mathbf{I}^T \quad (6.8-31)$$

式中, \mathbf{I} 为表示修改位置的列阵, 如 $\mathbf{I} = [0 \cdots 0 \ 1 \ 0 \cdots 0 \ -1 \ 0 \cdots 0]^T$ 。将上式代入式(6.8-6)后再代入式(6.8-7), 并将 φ_1 仍写为 φ , 得

$$(\text{diag}[k_i] + \varphi^T \Delta k \mathbf{I}^T \varphi - \lambda \text{diag}[m_i]) \mathbf{Y} = \mathbf{0} \quad (6.8-32)$$

假设 φ 已按质量归一化, 即

$$\begin{aligned} \text{diag}[m_i] &= \mathbf{I} \\ \text{diag}[k_i] &= \text{diag}[\lambda_i] \end{aligned}$$

式中 $\lambda_i = \omega_{0i}^2$, 并令

$$u = \varphi^T l \quad (6.8-33)$$

则式(6.8-32)成为

$$(\text{diag}[\lambda_i - \lambda] + \Delta k u u^T) Y = 0 \quad (6.8-34)$$

写出第 i 个方程并稍加整理,得

$$(\lambda_i - \lambda) \frac{Y_i}{u_i} = -\Delta k \sum_{k=1}^n u_k Y_k \quad (6.8-35)$$

式中 u_k, Y_k 为 u, Y 中第 k 个元素。对不同的 i , 上式右端不变, 则

$$(\lambda_i - \lambda) \frac{Y_i}{u_i} = (\lambda_k - \lambda) \frac{Y_k}{u_k}$$

或

$$Y_k = (\lambda_i - \lambda) \frac{Y_i}{u_i} \cdot \frac{u_k}{\lambda_k - \lambda} \quad (6.8-36)$$

代入式(6.8-35), 整理得

$$\sum_{k=1}^n \frac{u_k^2}{\lambda_k - \lambda} = -\frac{1}{\Delta k} \quad (6.8-37)$$

即修改后系统的特征方程, 可求解出特征值 λ , 代入式(6.8-36)得 Y_k , 从而修改后的特征矢量为

$$\varphi'_i = \varphi Y \quad (6.8-38)$$

2. 子结构综合法

子结构综合法用于大型复杂结构的模态分析是很有效的。其原理是, 将结构分成若干子结构, 并赋予子结构一定的边界条件。分别对各子结构做模态分析, 然后利用子结构之间的连接条件, 通过模态综合技术求得整体结构的模态参数。子结构方法有两种, 模态综合法和机械阻抗(导纳)法。机械阻抗法用于再分析很方便。其原理是, 将原结构看作主结构 A, 修改(增加或减少)部分看作子结构 B, 且子结构 B 的自由度是主结构 A 自由度的一部分, 即界面自由度完全属于主结构。下面介绍机械阻抗法的两种方法。

(1) 方法一

图 6.8-1 表示主结构(原结构)A 与子结构(修改部分)B 的组合结构(修改后结构)。由式(1.6-9), 主结构的振动方程为

$$Z^A X^A = F^A \quad (6.8-39)$$

Z^A 为 A 的阻抗矩阵。上式按非界面自由度与界面自由度分块

$$\begin{bmatrix} Z_{ii}^A & Z_{ij}^A \\ Z_{ji}^A & Z_{jj}^A \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_i^A \\ X_j^A \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_i^A \\ F_j^A \end{bmatrix} \quad (6.8-40)$$

式中 i, j 分别表示非界面与界面自由度; F_i^A 表示 A 上外力, F_j^A 表示 B 给 A 的力。

子结构 B 的振动方程为

$$Z_{jj}^B X_j^B = F_j^B \quad (6.8-41)$$

F_j^B 表示 A 给 B 的力, B 上无其他外力作用。扩充到组合结构自由度数, 写成

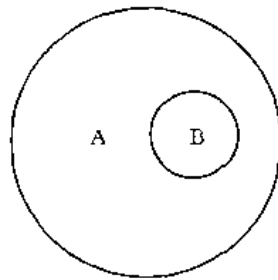


图 6.8-1 组合结构

$$\begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{Z}_B^B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{X}_i^A \\ \mathbf{X}_j^B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{F}_j^B \end{bmatrix} \quad (6.8-42)$$

考虑界面协调条件

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{X}_j^B &= \mathbf{X}_j^A \\ \mathbf{F}_j^A + \mathbf{F}_j^B &= \mathbf{0} \end{aligned} \right\} \quad (6.8-43)$$

将式(6.8-40)与式(6.8-42)相加,得组合结构的振动方程

$$\mathbf{Z}\mathbf{X} = \mathbf{F} \quad (6.8-44)$$

式中

$$\mathbf{Z} = \mathbf{Z}^A + \mathbf{Z}^B = \begin{bmatrix} \mathbf{Z}_{ii}^A & \mathbf{Z}_{ij}^A \\ \mathbf{Z}_{ji}^A & \mathbf{Z}_{jj}^A + \mathbf{Z}_{jj}^B \end{bmatrix} \quad (6.8-45)$$

$$\mathbf{Z}^A = \begin{bmatrix} \mathbf{Z}_{ii}^A & \mathbf{Z}_{ij}^A \\ \mathbf{Z}_{ji}^A & \mathbf{Z}_{jj}^A \end{bmatrix}, \mathbf{Z}^B = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{Z}_{jj}^B \end{bmatrix} \quad (6.8-46)$$

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} \mathbf{X}_i^A \\ \mathbf{X}_j^B \end{bmatrix}, \mathbf{F} = \begin{bmatrix} \mathbf{F}_i^A \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (6.8-47)$$

式(6.8-44)的特征值问题

$$\mathbf{Z}\mathbf{X} = \mathbf{0} \quad (6.8-48)$$

若已知原结构(主结构)A和修改部分(子结构)B的阻抗矩阵 \mathbf{Z}^A 、 \mathbf{Z}^B 或 \mathbf{Z}_{jj}^B , 由式(6.8-48)可求得修改后结构(组合结构)的特征值和特征向量,事实上,是以 \mathbf{Z} 为基础重新做参数识别。

如果 \mathbf{Z}_{jj}^B 可逆,还可导出组合结构频响函数的表达式

$$\mathbf{H} = \mathbf{Z}^{-1} = \begin{bmatrix} \mathbf{H}_{ii}^A & \mathbf{H}_{ij}^A \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \mathbf{H}_{ij}^A & \mathbf{H}_{jj}^A \\ -\mathbf{H}_{jj}^B & -\mathbf{H}_{jj}^B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (\mathbf{H}_{jj}^A + \mathbf{H}_{jj}^B)^{-1} \mathbf{H}_{ji}^A & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & (\mathbf{H}_{jj}^A + \mathbf{H}_{jj}^B)^{-1} \mathbf{H}_{jj}^A \end{bmatrix} \quad (6.8-49)$$

式中

$$\mathbf{H}^A = \begin{bmatrix} \mathbf{H}_{ii}^A & \mathbf{H}_{ij}^A \\ \mathbf{H}_{ji}^A & \mathbf{H}_{jj}^A \end{bmatrix}, \mathbf{H}_{jj}^B = \mathbf{Z}_{jj}^{B-1} \quad (6.8-50)$$

通过 \mathbf{H} 做参数识别,可求得组合结构的模态参数。

(2)方法二

当只限于在一点 a 增加质量或两点 a 、 b 之间增加刚度时,从主结构 A 非界面上任意两点 e 、 f 及子结构(界面)B上任一点 a 或两点 a 、 b 之间的频响函数的关系,可导出组合结构任意两点 e 、 f 之间的频响函数。

1)在一点 a 增加质量 在主结构 A 上 a 点增加一集中质量 B,质量为 m ,如图 6.8-2 所示。设主结构在 f 点作用激振力 F_f^A ,附加质量 B 的惯性力即 B 作用于 A 的力为 F_a^A 。在 F_f^A 和 F_a^A 共同作用下,组合结构 e 、 a 两点的加速度响应为

$$A_e^A = H_{ef}^A F_f^A + H_{ea}^A F_a^A \quad (6.8-51)$$

$$A_a^A = H_{af}^A F_f^A + H_{aa}^A F_a^A \quad (6.8-52)$$

式中 H_{ef}^A 、 H_{ea}^A 、 H_{af}^A 、 F_{aa}^A 表示原结构(主结构)A 的加速度频响函数。由式(6.8-51),有

$$H_{ef}^m \approx \frac{A_e^A}{F_f^A} = H_{ef}^A + H_{ea}^A \frac{F_a^A}{F_f^A} \quad (6.8-53)$$

H_{ef}^m 为组合结构 e 、 f 之间的加速度频响函数。

由式(6.8-52), 解得

$$F_f^A = \frac{A_a^A - H_{aa}^A F_a^A}{H_{af}^A} \quad (6.8-54)$$

代入式(6.8-53)得

$$H_{ef}^m = H_{ef}^A + \frac{H_{ea}^A H_{af}^A}{\frac{A_a^A}{F_a^A} - H_{aa}^A} \quad (6.8-55)$$

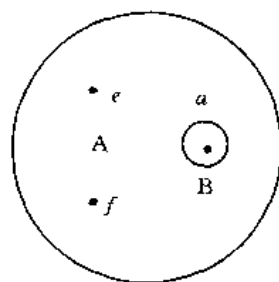


图 6.8-2 在一点增加质量的组合结构

由界面协调条件

$$\left. \begin{aligned} A_a^B &= A_a^A \\ F_a^A + F_a^B &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (6.8-56)$$

则

$$\frac{A_a^A}{F_a^A} = -\frac{A_a^B}{F_a^B} = -\frac{1}{m} \quad (6.8-57)$$

代入式(6.8-55)得

$$H_{ef}^m = H_{ef}^A - \frac{H_{ea}^A H_{af}^A}{H_{aa}^A + \frac{1}{m}} \quad (6.8-58)$$

可见, 已知原结构加速度频响函数矩阵 H^A , 由上式可求出增加一质量后的加速度频响函数矩阵 H^m 。如, 原结构激励 f 点, 改变测点 e , 可得 H_{ef}^A (包括 H_{af}^A); 再激励 a 点, 测得 H_{ea}^A (包括 H_{aa}^A), 则得修改后结构加速度频响函数矩阵 H^m 的一系列元素, 经参数识别, 可求得修改结构的模态参数。

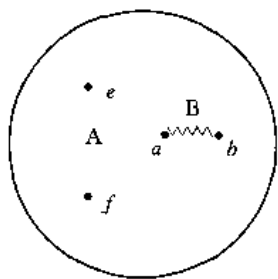


图 6.8-3 在两点之间增加弹簧后的组合结构

2) 在两点 a 、 b 增加弹簧 在主结构 A 上 a 、 b 两点增加一弹簧 B , 刚度为 k , 如图 6.8-3 所示。设在 f 点作用激振力 F_f^A , 弹簧 B 在 a 、 b 两点的作用力为 F_a^A 、 F_b^A , 则组合结构在 e 、 a 、 b 三点的位移响应为

$$X_e^A = H_{ef}^A F_f^A + H_{ea}^A F_a^A + H_{eb}^A F_b^A \quad (6.8-59)$$

$$X_a^A = H_{af}^A F_f^A + H_{aa}^A F_a^A + H_{ab}^A F_b^A \quad (6.8-60)$$

$$X_b^A = H_{bf}^A F_f^A + H_{ba}^A F_a^A + H_{bb}^A F_b^A \quad (6.8-61)$$

式中 H^A 表示原结构 A 的位移频响函数。

由式(6.8-59)解得

$$H_{ef}^k = \frac{X_e^A}{F_f^A} = H_{ef}^A + \frac{H_{ea}^A F_a^A + H_{eb}^A F_b^A}{F_f^A} \quad (6.8-62)$$

考虑下列平衡关系和界面协调条件

$$\left. \begin{aligned} F_a^A + F_b^A &= 0 \\ F_a^A + F_a^B &= 0, F_b^A + F_b^B = 0 \\ X_a^A &= X_a^B, X_b^A = X_b^B \\ k(X_a^B - X_b^B) &= F_a^B \end{aligned} \right\} \quad (6.8-63)$$

式(6.8-62)成为

$$H_{ef}^* = H_{ef}^A + \frac{(H_{aa}^A - H_{ab}^A)F_a^A}{F_f^A} \quad (6.8-64)$$

式(6.8-60)与式(6.8-61)相减,得

$$-\frac{F_a^A}{k} = (H_{af}^A - H_{bf}^A)F_f^A + (H_{aa}^A - H_{ba}^A)F_a^A + (H_{ab}^A - H_{bb}^A)F_b^A$$

解得

$$F_f^A = \frac{(H_{aa}^A - H_{ba}^A) - (H_{ab}^A - H_{bb}^A) + \frac{1}{k}}{H_{af}^A - H_{bf}^A} F_a^A \quad (6.8-65)$$

代入式(6.8-64)得

$$H_{ef}^* = H_{ef}^A - \frac{(H_{aa}^A - H_{ab}^A)(H_{af}^A - H_{bf}^A)}{(H_{aa}^A - H_{ba}^A) - (H_{ab}^A - H_{bb}^A) + \frac{1}{k}} \quad (6.8-66)$$

为加弹簧后 e, f 两点之间的位移频响函数。

若增加的质量和弹簧不止一个,需重复使用式(6.8-58)和式(6.8-66)。

比较两种方法,方法二在修改量较少时较方便,省去矩阵求逆运算。注意,方法一和方法二是统一的。当仅增加一质量 m 时,令

$$H_{jj}^B = H_{aa}^B = \frac{1}{m}$$

代入式(6.8-49)可导出式(6.8-58)。注意式(6.8-49)的形式亦可表示加速度频响函数。

当仅增加一弹簧时,B结构(弹簧)的阻抗矩阵

$$Z_{jj}^B = \begin{bmatrix} k & -k \\ -k & k \end{bmatrix} \quad (6.8-67)$$

Z_{jj}^B 不可逆,故不能由式(6.8-49)直接导出式(6.8-66),但可由式(6.8-45)直接计算组合结构阻抗阵 Z 。

许多情况下,修改结构时增加有质量的弹簧(杆)。可简化为两端带质量 m 的弹簧 k ,如图 6.8-4 所示。这时 B 结构的阻抗阵

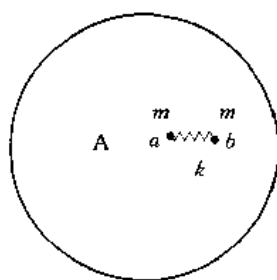


图 6.8-4 增加带质量弹簧 为
的组合结构

$$Z_{jj}^B = \begin{bmatrix} k - m\omega^2 & -k \\ -k & k - m\omega^2 \end{bmatrix} \quad (6.8-68)$$

3. 频率响应函数法

设修改后振动结构的物理参数矩阵为:

$$M = M_0 + \Delta M, C = C_0 + \Delta C, K = K_0 + \Delta K \quad (6.8-69)$$

频响函数矩阵为

$$\mathbf{H} = (-\omega^2 \mathbf{M} + j\omega \mathbf{C} + \mathbf{K})^{-1} = (\mathbf{Z}_0 + \Delta \mathbf{Z})^{-1} \quad (6.8-70)$$

式中

$$\mathbf{Z}_0 = \mathbf{H}_0^{-1} = -\omega^2 \mathbf{M}_0 + j\omega \mathbf{C}_0 + \mathbf{K}_0 \quad (6.8-71)$$

$$\Delta \mathbf{Z} = -\omega^2 \Delta \mathbf{M} + j\omega \Delta \mathbf{C} + \Delta \mathbf{K} \quad (6.8-72)$$

\mathbf{Z}_0 、 \mathbf{H}_0 分别为修改前结构的阻抗矩阵和频响应函数矩阵; $\Delta \mathbf{Z}$ 为修改后结构的增量阻抗矩阵。

注意到 $\Delta \mathbf{Z}$ 一般为稀疏、带状矩阵, 引入位置矩阵 \mathbf{P} , $n \times m$ 阶, n 为系统自由度数, m 为被修改的自由度数, 一般 $m \ll n$ 。 \mathbf{P} 定义为由 n 阶单位阵划掉与未修改自由度对应的列后形成的子阵。

令 $\tilde{\mathbf{M}}$ 、 $\tilde{\mathbf{C}}$ 、 $\tilde{\mathbf{K}}$ 分别为将 $\Delta \mathbf{M}$ 、 $\Delta \mathbf{C}$ 、 $\Delta \mathbf{K}$ 中与修改自由度无关的行和列划掉后剩余的子阵, 均为 $m \times m$ 阶。这样, 式(6.8-72)可写成

$$\Delta \mathbf{Z} = -\omega^2 \mathbf{P} \tilde{\mathbf{M}} \mathbf{P}^T + j\omega \mathbf{P} \tilde{\mathbf{C}} \mathbf{P}^T + \mathbf{P} \tilde{\mathbf{K}} \mathbf{P}^T = \mathbf{P} \tilde{\mathbf{Z}} \mathbf{P}^T \quad (6.8-73)$$

式中

$$\tilde{\mathbf{Z}} = -\omega^2 \tilde{\mathbf{M}} + j\omega \tilde{\mathbf{C}} + \tilde{\mathbf{K}} \quad (6.8-74)$$

为 $m \times m$ 阶对称矩阵, 一般为非奇异矩阵。

将式(6.8-73)代入式(6.8-70), 并写成

$$(\mathbf{Z}_0 + \mathbf{P} \tilde{\mathbf{Z}} \mathbf{P}^T) \mathbf{H} = \mathbf{I} \quad (6.8-75)$$

两端左乘 $\tilde{\mathbf{Z}} \mathbf{P}^T \mathbf{H}_0$, 得

$$(\tilde{\mathbf{Z}} + \tilde{\mathbf{Z}} \mathbf{P}^T \mathbf{H}_0 \mathbf{P} \tilde{\mathbf{Z}}) \mathbf{P}^T \mathbf{H} = \tilde{\mathbf{Z}} \mathbf{P}^T \mathbf{H}_0$$

解得

$$\mathbf{P}^T \mathbf{H} = (\tilde{\mathbf{Z}} + \tilde{\mathbf{Z}} \mathbf{P}^T \mathbf{H}_0 \mathbf{P} \tilde{\mathbf{Z}})^{-1} \tilde{\mathbf{Z}} \mathbf{P}^T \mathbf{H}_0 \quad (6.8-76)$$

代入式(6.8-75), 左乘 \mathbf{H}_0 , 得修改后结构频响应函数

$$\mathbf{H} = \mathbf{H}_0 - \mathbf{H}_0 \mathbf{P} (\tilde{\mathbf{Z}}^{-1} + \mathbf{P}^T \mathbf{H}_0 \mathbf{P})^{-1} \mathbf{P}^T \mathbf{H}_0 \quad (6.8-77)$$

式中第一项为原系统频响应函数, 第二项为修改结构引起频响应函数的增量, \mathbf{H} 仍保持对称性。对 \mathbf{H} 进行参数识别, 得修改后结构模态参数。

6.8.4 实例

以三自由度系统为例, 说明利用频率响应函数方法进行局部结构动力修改的过程。

系统如图 6.8-5 所示, 设 $m_1 = m_2 = m_3 = 1 \text{ kg}$, $k_1 = k_2 = k_3 = k_4 = 100 \text{ N/m}$, 阻尼取为模态阻尼 $\zeta_{10} = \zeta_{20} = \zeta_{30} = 0.035$ 。

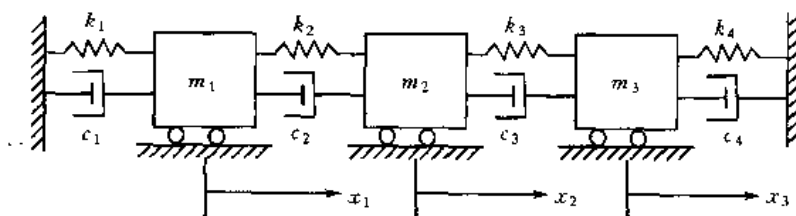


图 6.8-5 原系统模型

由振动理论, 系统的无阻尼固有频率为

$$\omega_{10} = 7.65 \text{ s}^{-1}, \quad \omega_{20} = 14.14 \text{ s}^{-1}, \quad \omega_{30} = 18.476 \text{ s}^{-1}$$

振型矩阵为

$$\boldsymbol{\varphi}_0 = \begin{bmatrix} 0.5 & -0.707 & 0.5 \\ 0.707 & 0 & -0.707 \\ 0.5 & 0.707 & 0.5 \end{bmatrix}$$

频响函数矩阵 \mathbf{H}_0 的第一列元素 H_{110} 、 H_{210} 、 H_{310} 的模如图 6.8-6 所示。

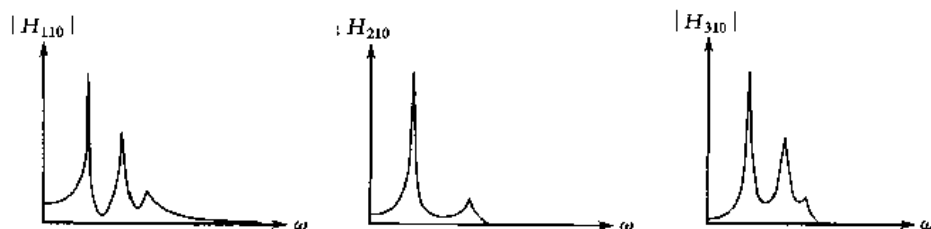


图 6.8-6 原结构频响函数

现对原系统进行修改,在弹簧 k_1 处加一弹簧 k_0 ,在弹簧 k_4 处加一弹簧 k_0 ,在 m_3 上加一集中质量 m_0 ,修改后的系统如图 6.8-7 所示。

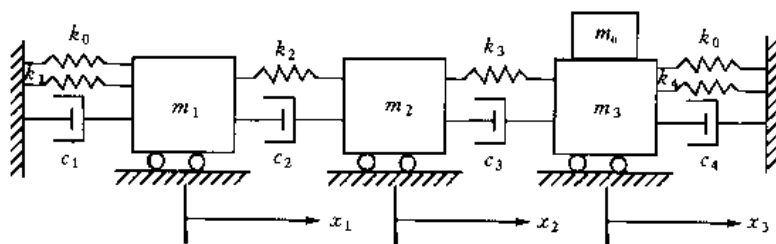


图 6.8-7 修改后系统模型

由于仅第一个和第三个自由度被修改,所以

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

刚度矩阵的增量为

$$\Delta \mathbf{K} = \begin{bmatrix} k_0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k_0 \end{bmatrix} = \mathbf{P} \Delta \tilde{\mathbf{K}} \mathbf{P}^T, \quad \Delta \tilde{\mathbf{K}} = \begin{bmatrix} k_0 & 0 \\ 0 & k_0 \end{bmatrix}$$

质量矩阵的增量为

$$\Delta \mathbf{M} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m_0 \end{bmatrix} = \mathbf{P} \Delta \tilde{\mathbf{M}} \mathbf{P}^T, \quad \Delta \tilde{\mathbf{M}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & m_0 \end{bmatrix}$$

阻尼矩阵的增量 $\Delta \mathbf{C} = \mathbf{0}$, 所以 $\Delta \tilde{\mathbf{C}} = \mathbf{0}$ 。

取 $k_0 = 200 \text{ N/m}$ 、 $m_0 = 0.1 \text{ kg}$ 计算出修改后的频数响应函数矩阵 \mathbf{H} 。其第一列元素 H_{11} 、 H_{21} 、 H_{31} 的模如图 6.8-8 所示。

程序计算与 HP5423A 联机,得到修改后系统的固有频率为

$$\omega_1 = 11.376 \text{ s}^{-1}, \quad \omega_2 = 19.693 \text{ s}^{-1}, \quad \omega_3 = 21.880 \text{ s}^{-1}$$

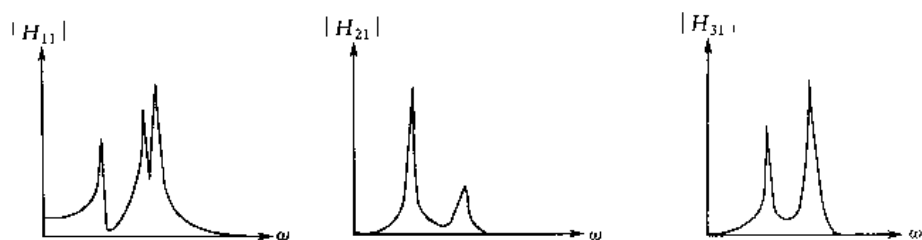


图 6.8-8 系统修改后频响函数

阻尼因子为

$$\zeta_1 = 0.027\ 0, \quad \zeta_2 = 0.026\ 9, \quad \zeta_3 = 0.029\ 2$$

振型矩阵为

$$\varphi = \begin{bmatrix} 0.899\ 7 & 0.942\ 6 & 1.123\ 0 \\ 2.456\ 0 & 0.181\ 3 & -0.681\ 8 \\ 0.945\ 5 & -1.220\ 8 & 0.766\ 1 \end{bmatrix}$$

6.9 结构优化设计

在前面的分析中,给出了结构动力修改所用到的各种方法。广义地讲,这些方法也构成了结构优化设计的内容。然而,结构修改量是以物理参数(质量、刚度、阻尼)表示的,而工程设计中最终需要的乃是以结构参数(尺寸、材料特性等)表示的修改量。因此,如何修改结构参数,使结构特性(包括静态和动态特性)达到最优,是结构优化设计的最终目的。

达到上述目的的途径有两种,一种是由结构静态和动态修改所得到的 ΔM 、 ΔK 、 ΔC 求结构参数变化量 ΔP ,另一种是以结构参数 P 为变量,直接应用优化方法求在约束条件(静、动特性)下结构参数的修改量 ΔP ,目标函数可取自重量最小、修改量最少、特征解方程等物理关系式。

结构优化设计包含极广泛的内容。除了确定性问题的优化外,近年来人们也在注意考虑不确定因素的影响,研究基于可靠度、健壮性的优化设计。除了研究材料优化、形状优化外,对拓扑优化研究也已成为结构优化设计中的前沿课题,特别是拓扑优化研究中提出的均匀化方法等,可将材料选择、布局优化和形状优化集成一体,为并发设计(Concurrent Design)中材料、工艺和结构的选择提供科学的手段。当然,传统的以结构静、动特性为目标或约束的优化设计方法仍是当今工程界应用的主要方法,特别是基于实验模态分析的结构动态优化正在工程设计领域发挥重要作用。

结构动态优化设计是以结构的固有频率和动力响应作为目标函数或约束条件,通过优化设计降低振动水平,保证结构性能,改善工作环境。目前,人们已提出多种优化方法。无论何种方法,一般都要辅以 FEM 或 BEM(边界元法)完成。下面通过对机翼颤振模型设计的实例分析介绍结构动态优化的一般过程。

对大型结构的实验室分析需要依据几何相似和动力相似准则设计实验模型,特别是一些动态特性占主要地位的结构,如大型航空航天器,汽车、船舶等运输工具,旋转机械、精密机械等,建立准确模拟原结构动态特性的模型具有极其重要的意义。

6.9.1 设计目标与设计参数

飞机机翼颤振模型是进行飞机颤振研究的重要手段。由于机翼的振动特性(固有频率、固有振型)对颤振特性有着重要影响,因而颤振模型应满足相应的振动特性要求。

通过振动试验测量机翼的振动特性。试验分两种情况:①机翼固定在承力柱上;②全机地面振动试验。两种情况下测得的机翼前三阶固有频率和固有振型(节线位置)是不同的,其原因是机翼的边界支持条件不同。前者可看作固定支持,而后者为弹性支持。

对于机翼颤振模型的颤振试验(风洞吹风)来说,模型的动力学设计需要模拟的是机翼在全机地面振动试验中的振动特性。为简化研究,设计工作分为两步:首先进行模型的主体结构设计,使其满足机翼固定在承力柱上时所对应的振动特性要求;其次通过模拟机翼与机身隔框之间联接刚度的支持元件设计,使整个模型满足机翼在全机地面振动试验时所对应的振动特性要求。设计参数是模型的前三阶固有频率与振型节线位置,列于表 6.9-1 及示于图 6.9-1 与图 6.9-2 中。

表 6.9 1 机翼颤振模型前三阶固有频率对照表 (Hz)

支撑情况	要求设计值	设计结果	实测结果
固定支撑	3.6	3.65	3.67
	10.5	10.53	11.01
	13.0	13.02	12.83
弹性支撑	3.3	3.29	3.39
	9.6	9.64	9.94
	12.0	12.08	11.57

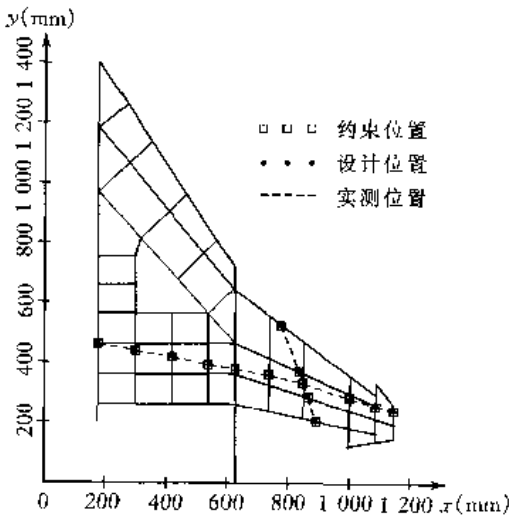


图 6.9-1 振型节线位置图(固定支撑)

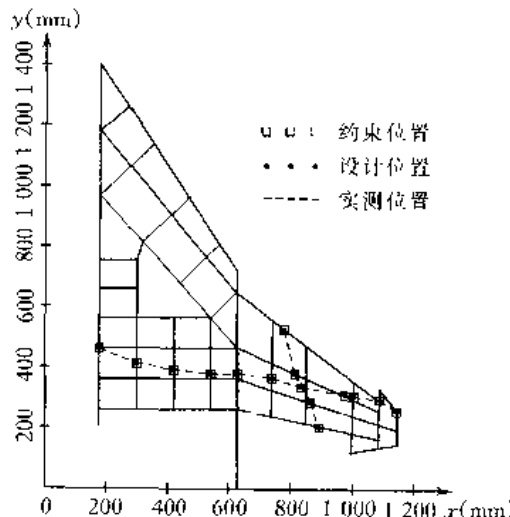


图 6.9-2 振型节线位置图(弹性支撑)

6.9.2 设计模型、设计变量与设计方法

1. 设计模型

机翼颤振模型的原准结构为梁系结构,材料为铝合金。在结构动力学设计中,将机翼颤振模型离散为含有 71 个结点、111 个梁单元的平面结构有限元模型。梁单元的各个结点仅考虑

三个自由度,即沿 x 轴方向的平动 u_x ,绕 y 轴和 z 轴的转动 θ_y 和 θ_z 。设计模型如图 6.9-3 所示。

2. 设计变量

对所建立的有限元模型,若以所有梁单元的宽与高作为设计变量,则将有 222 个设计变量。不论采用哪种设计方法,有这么多的设计变量,都将是十分复杂的,甚至会导致设计方法失效。而且,对实际工程而言,这样做既没必要,也不切实际。根据具体结构的特点及工艺性要求,可将模型分为若干区块,在同一区块内限定梁单元的截面尺寸相同。这样可使设计变量减至数十个。

3. 设计方法

由于模型的设计参数对模型修正与特征值问题来说是欠完善、欠完备的,且带有比较严格的约束要求(总质量、质心位置等),因而宜采用优化方法,即依据模型的动力学基本方程与基本关系,将动力学设计归为满足预定设计要求与约束条件的约束优化问题。由于特征值问题的非线性性质,优化算法拟采用约束变尺度法。

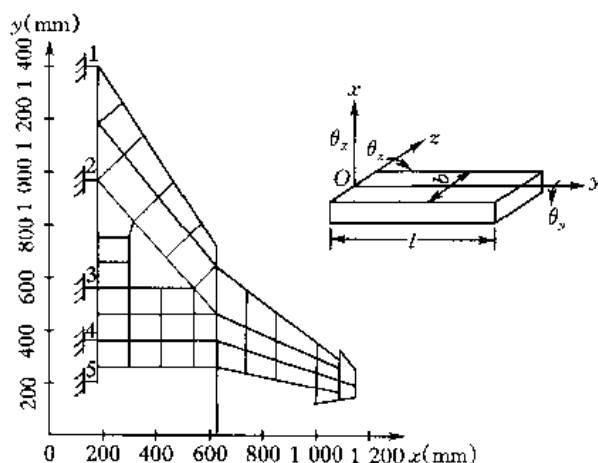


图 6.9-3 机翼颤振模型的设计模型

6.9.3 主体结构设计

1. 问题的描述

设 b_1, b_2, \dots, b_s 为设计变量,则模型的总重量 G 、质心位置 (x_c, y_c) 、各阶固有频率 ω_i 与各阶固有振型 φ_i 均是 b_1, b_2, \dots, b_s 的函数。各阶振型节线位置与对应阶的振型数据有关。此外,为使设计结果具有工程实际意义,应给设计变量设定选值范围。这样,颤振模型主体结构的动力学设计可表述为如下的优化约束问题。

$$\left. \begin{array}{l} \text{目标} \quad \min F(b_1, b_2, \dots, b_s), F \text{ 为关于设计变量 } b_1, b_2, \dots, b_s \text{ 的误差泛函} \\ \text{频率约束} \quad |\omega_i - \bar{\omega}_i| \leq \epsilon_{\omega_i} \quad (i = 1, 2, \dots, t) \\ \text{节点位置约束} \quad \begin{cases} |x_{ji} - \bar{x}_{ji}| \leq \epsilon_{x_{ji}} \\ |y_{ji} - \bar{y}_{ji}| \leq \epsilon_{y_{ji}} \end{cases} \quad \begin{cases} i = 1, 2, \dots, t \\ j = 1, 2, \dots, p_i \end{cases} \\ \text{总重量约束} \quad |G_i - G_i| \leq \epsilon_{G_i} \\ \text{质心位置约束} \quad \begin{cases} |x_c - \bar{x}_c| \leq \epsilon_c \\ |y_c - \bar{y}_c| \leq \epsilon_c \end{cases} \\ \text{变量选值范围} \quad b_k^l \leq b_k \leq b_k^u \quad (k = 1, 2, \dots, s) \end{array} \right\} \quad (6.9-1)$$

2. 振型节线位置的确定

节线可近似地看作有限个节点的连线,因而节线位置实质上是各节点的位置。有限元模型的正问题求解并不直接给出结构的各节点位置,需要根据有限元网格与各结点的振型数据进行搜索。具体做法是:有限元网格上,沿各结点的单侧各可能方向,由相邻结点的振型数据

确定节点的存在及其位置;通过多项式拟合或样条函数拟合将各节点连接起来得到节线位置。对于高阶振型而言,由于节线有多条,需要分区域搜索。

3. 敏感设计变量选取

对精选的设计变量,仍需通过灵敏度分析再挑选其中的敏感变量,以简化设计问题,提高优化算法的效率。本研究采用列主元 QR 分解技术,根据设定的有效秩的容限挑选出敏感设计变量。由于各阶模态所对应的敏感设计变量集合往往并不相同,因而需要对各阶敏感设计变量集合加以综合,以寻求通过最少的设计变量的修改,同时满足多阶固有频率与多阶振型节线位置的设计要求。

4. 设计结果

主体结构参数优化设计结果列于表 6.9-2 中,用有限元法计算设计结果,设计得到的固有频率列于表 6.9-1 中,设计得到的节线位置示于图 6.9-1 中。

表 6.9-2 主体结构参数优化设计情况 (mm)

参数序号	初始值	设计值	参数序号	初始值	设计值
1	10	6.7	11	10	5.5
2	10	9.1	12	10	6.9
3	10	4.6	13	10	9.6
4	10	3.6	14	10	2.8
5	10	3.2	15	10	3.8
6	10	3.6	16	10	3.3
7	10	4.6	17	10	6.0
8	10	5.7	18	10	5.9
9	10	4.1	19	10	6.2
10	10	8.0			

6.9.4 边界支持元件设计

1. 基本原理

假定边界支持元件的引入没有改变模型的自由度。设主体结构的质量矩阵和刚度矩阵为 M_0 和 K_0 ,加上支持元件后模型的质量和刚度矩阵为 M 和 K ,则

$$M = M_0 + \Delta M \tag{6.9-2}$$

$$K = K_0 + \Delta K \tag{6.9-3}$$

式中

$$\Delta M = \sum_{i=1}^{n_s} T_i^T M_e^{(i)} T_i \tag{6.9-4}$$

$$\Delta K = \sum_{i=1}^{n_s} T_i^T K_e^{(i)} T_i \tag{6.9-5}$$

式中, n_s 是支持元件的个数; T_i 是同时考虑了对接关系和坐标变换的转换矩阵; $M_e^{(i)}$ 、 $K_e^{(i)}$ 分别为第 i 个支持元件在局部坐标系中的质量矩阵和刚度矩阵。

从形式上看,边界支持元件相当于有限元模型中的单元,因而它的设计可沿用前述一般设

计变量的求解方法。由于结构振动特性对边界条件的变化具有较强的敏感性,因而边界条件的变化可能会更有效地影响结构的振动特性。

2. 设计结果

支持元件采用连接片,如图 6.9-3 所示为梁元素。第 i 个支持元件的质量与刚度矩阵分别为

$$\mathbf{M}_e^{(i)} = \frac{A_i \rho_i l_i}{420} \begin{bmatrix} 4l_i^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -3l_i^2 & 0 & 4l_i^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \frac{GJ_i}{l_i} \begin{bmatrix} 0 & \rho_i l_i / 3G & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \rho_i l_i^2 / 6G & 0 & \rho_i l_i / 3G \\ 0 & \rho_i l_i^2 / 6G & 0 & \rho_i l_i / 3G \end{bmatrix} \quad (6.9-6)$$

$$\mathbf{K}_e^{(i)} = \frac{EI_{xi}}{l_i^3} \begin{bmatrix} 4l_i^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2l_i^2 & 0 & 4l_i^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \frac{GJ_i}{l_i} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (6.9-7)$$

式中, l_i 为梁元长度; A_i 为梁元横截面积; GJ_i 为梁元扭转刚度, EI_{xi} 为梁元弯曲刚度; ρ_i 为材料密度。

根据模型的实际情况,各连接片的长度、厚度及材料选取相同,取各片宽度 b_i 为设计变量,设计结果列于表 6.9-3 中。机翼颤振模型在弹性支持条件下的固有频率设计结果列于表 6.9-1 中,振型节线位置设计结果示于图 6.9-2 中。可以看出,通过边界支持元件的设计,使得按固定支撑状态设计的模型结构满足了机翼与机身弹性隔框相联时的动态性能要求。

表 6.9-3 连接片设计情况 (mm)

序 号	初始值	设计结果
1	40	27.6
2	63	40.3
3	73	50.1
4	31	23.8
5	40	30.6

6.9.5 试验验证

在原准结构的基础上,根据结构动力学设计给出的物理参数,制作了机翼颤振模型及其支持连接元件,并对模型进行了模态试验与风洞吹风试验。

模态试验测得的模型固有频率列于表 6.9-1 中,测得的振型节线位置分别示于图 6.9-1 与图 6.9-2 中。这些结果表明,模型的振动性能达到了预定的设计要求,说明模型主体结构设计与边界支持元件的设计均是成功的。

6.10 模态分析在故障诊断和状态监测中的应用

应用模态分析的方法进行故障诊断和状态监测是近年来发展起来的一种方法。当结构发生故障时,如出现裂纹、松动、零部件损坏等情况,结构物理参数发生变化,其特征参数(固有频率、模态阻尼、振型、频响函数、相干函数等)亦随之改变。根据这些参数的变化情况,可以判断出故障类型,有时还可以判断出故障位置。

必须指出,应用模态分析进行故障诊断和状态监测的方法有自身的特点,因而也有局限性,并非所有故障都可由这种方法判断。比如,对金属结构小裂纹情形,这种方法往往效果不

好,因为固有频率和振型对小裂纹并不敏感,当然这种敏感性还与裂纹位置有关。尽管模态阻尼和高阶模态频率对裂纹的敏感性较强,但常常仍不足以判断出来。一般来讲,应用模态分析方法对动态故障的诊断效果优于对静态故障的诊断,对大型复杂结构故障诊断的效果优于对简单小型结构的故障诊断,这也是模态分析用于故障诊断和状态监测的优势所在。

6.10.1 模态分析在故障诊断中的应用

1. 航空发动机故障诊断

某航空发动机在使用过程中和试车台上频繁发生故障,直观表现为振动加速度幅值严重超标,导致常常提前维修,甚至被迫空中停车。

为了找到该发动机产生故障的真正原因,首先对一台新的同型号发动机和故障发动机进行空载运行试验,实测发动机典型部位的加速度响应并进行频谱分析。图 6.10-1 是在发动机油门角为 18° 时 3[#]、6[#] 测点的频谱图。

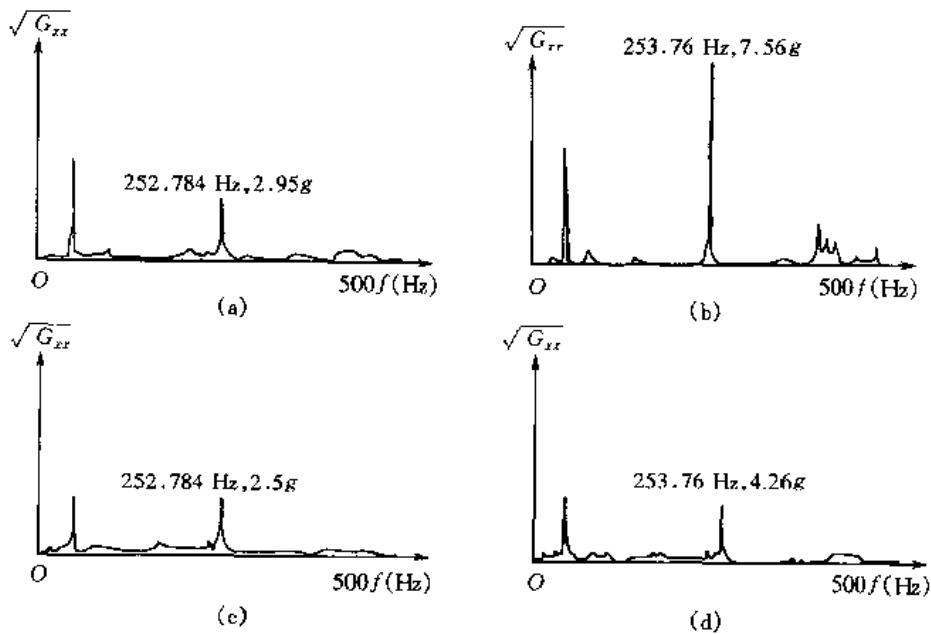


图 6.10-1 发动机响应频谱图

(a)标准机 3[#] 点;(b)故障机 3[#] 点;(c)标准机 6[#] 点;(d)故障机 6[#] 点

频谱分析发现,两台发动机的频谱结构几乎完全一致。不同的是,在约 252 Hz 处,故障机的频谱幅值明显大于标准机。由此判断,故障原因可能是由于转子旋转频率与发动机某阶固有频率重合而引起的共振,而转子旋转激励力与转子的不平衡、安装不对中、机匣变形、密封环磨损或脱落、轴承损坏等诸多因素有关,首先考虑到的因素是转子不平衡。

通过动平衡试验,发现转子不平衡量大大超过标准值。为此,用三圆平衡法对发动机进行整机平衡,平衡结果使加速度最大幅值平衡量下降到 $0.6g$ 。然而,运行一段时间后,振动水平又急剧增加。这说明转子不平衡不是故障的真正原因,而动平衡的结果反而使真正故障部位更加恶化。

为了进一步查找故障原因,对发动机以冲击激励方式进行模态试验。图 6.10-2 是在压气机机匣与涡轮机机匣垂直方向激振,在机头拾振所得到的频响函数。结果表明,发动机并不

存在与转速一致的固有频率,因而排除了结构共振引起超差的可能性。

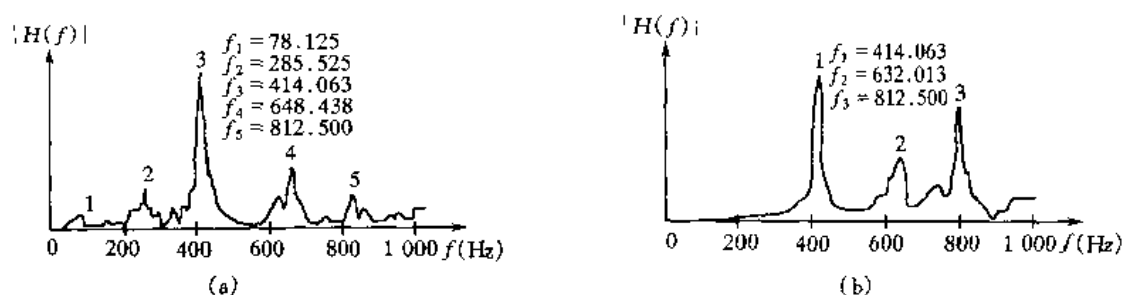


图 6.10-2 两种激振方式机头的频响函数
(a)压气机机匣垂直激振;(b)涡轮机机匣垂直激振

进一步检查其他环节,发现内锥筒破裂及涡轮轴处石墨密封环脱落,并磨出很深的槽。这是造成不平衡的真正原因。前面动平衡调试的结果是使转子更加不平衡。更换部件并严格进行平衡及装配,发动机故障排除,在修后 500 h 飞行观察中未有故障发生。

2. 桩基工程质量检测

对高层建筑、桥梁、海工结构及特殊建筑结构,都需采用深桩基础,即使普通建筑结构,在基础状态比较差的情况下,亦需使用桩基提高结构的稳定性。因此,桩基工程是建筑施工中一项重要环节,质量好坏直接关系到建筑结构的质量。

早期对桩基质量的检测采用静载试验,通过对桩施加静载荷,检验桩的承载能力。这种方法结果可靠,然而费时费力,试验开销很大。近年来逐渐发展了动测法,按应变大小可分为两类,一类是高应变法(有锤贯法、落球法等),另一类为低应变法(如机械阻抗法、应力波法等)。高应变法设备笨重,试验仍不太方便;低应变法设备轻便,试验灵活,既可检测出桩身大缺陷,又可估计承载能力,是近年来普遍采用的方法。机械阻抗法便是基于模态分析的一种新型方法。下面介绍这种方法。

假设桩一端自由、一端固定,桩长 L ,如图 6.10-3 所示。在自由端用冲击锤沿纵向施加冲击激励,并拾取该点的激励和纵向响应信号,经信号处理可得速度导纳(速度频响函数) $H_v(f)$,如图 6.10-4 所示。

根据线性振动理论,自由—固定桩的纵向振动固有频率为

$$f_i = \frac{2i-1}{4L}c_0 \quad (i=1,2,\dots) \quad (6.10-1)$$

式中, i 为纵向振动模态阶数; $c_0 = \sqrt{\frac{E}{\rho}}$ 为纵向波速; E 为弹性模量; ρ 为密度。由式(6.10-1)可见,自由—固定桩相邻固有频率之差(频差)为常值

$$\Delta f = f_{i+1} - f_i = \frac{c_0}{2L} \quad (6.10-2)$$

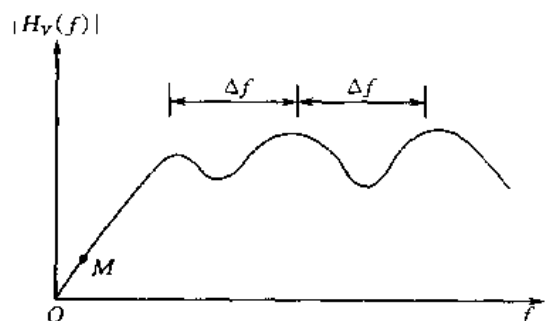


图 6.10-4 桩自由端速度导纳幅频曲线

由速度导纳曲线可估算出 Δf ,从而求出纵向波速的估算值

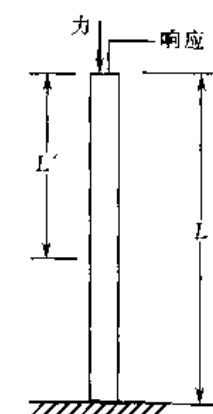


图 6.10-3 桩身模型

$$c = 2L\Delta f \quad (6.10-3)$$

c 为实测值,反映了桩身混凝土材料质量或浇注质量。若为正常桩, $c \approx c_0 = 2\,800 \sim 3\,000$ m/s,若桩材料或浇注有问题, c 应小于 c_0 。

若桩发生断裂,断裂位置为 L' (图 6.10-3),则由式(6.10-3)估算出的 c 应明显大于 c_0 。若实测频差为 $\Delta f'$, $\Delta f'$ 应大于 Δf ,由式(6.10-2)可估算断裂位置

$$L' = \frac{c_0}{2\Delta f'} = \frac{\Delta f}{\Delta f'} L \quad (6.10-4)$$

另外,还可进一步估算桩的静承载能力。由速度频响函数可求出在频率 f 下的动刚度

$$K_D = \left[\overline{H_V(\omega)} \right] = \left[\overline{H_V(f)} \right] \quad (6.10-5)$$

选取速度导纳低频段(f 接近 0)上某点 M ,该处动刚度为

$$K_{DM} = \left[\overline{H_V(f_M)} \right] \quad (6.10-6)$$

则纵向静刚度为

$$K = K_{DM} + \omega_M^2 m = \frac{2\pi f_M}{\left[\overline{H_V(f_M)} \right]} + 4\pi^2 f_M^2 m \quad (6.10-7)$$

式中 m 表示桩的质量。若许用应力为 $[\sigma]$,则桩最大静承载力为

$$P = \frac{KL[\sigma]}{E} \quad (6.10-8)$$

顺便指出,对自由—自由桩,上述各式仍然成立。若用其他频响函数曲线,式(6.10-5)~式(6.10-7)应做相应调整。

6.10.2 模态分析在状态监测中的应用

故障诊断一般为非实时性的,而状态监测一般为实时性的。最简单的状态监测指标是响应幅值。由于监测响应最直接、快捷,至今在许多旋转机械中仍普遍采用。如火力发电机组设定的瓦振位移双振幅阈值为 $50\,\mu\text{m}$ (合格)、 $30\,\mu\text{m}$ (良好)和 $20\,\mu\text{m}$ (优秀),一旦振动超标马上停机。随着信号处理技术的发展,以各种谱分析为基础的状态监测方法不断出现,如幅值谱、功率谱、相干函数、AR 谱等。下面介绍相干函数在状态监测中的应用实例。

机床在加工过程中的颤振(自激振动)会导致加工精度急剧下降,因此有必要对此故障状态进行监测。如 C6150 车床,经分析认为,加工中振动响应频率成分集中在 $100 \sim 1\,000$ Hz 之间。若采用响应幅值或一般谱分析监测,由于加工条件不同,难以设定统一的状态阈值。为此采用二点响应相干函数监测法。

在机床上选择二测点(如一在刀架上、一在溜板上),在平稳切削过程中,其响应相干函数 γ^2 的值明显小于 1。若颤振发生,机床各部件均在某一频率下做强烈周期振动,二测点相干函数明显接近 1。以此为依据,设定 γ^2 的阈值 γ_c^2 (如 $\gamma_c^2 = 0.95$),一旦 $\gamma^2 \geq \gamma_c^2$,则认为发生颤振。图 6.10-5 给出 C6150 机床在 $1\,000$ Hz 以内平稳切削和颤振切削工况下的时域波形和相干函数。其中在颤振发生时时域波形幅值明显加大,频率趋于低频段,且具有明显的周期性。

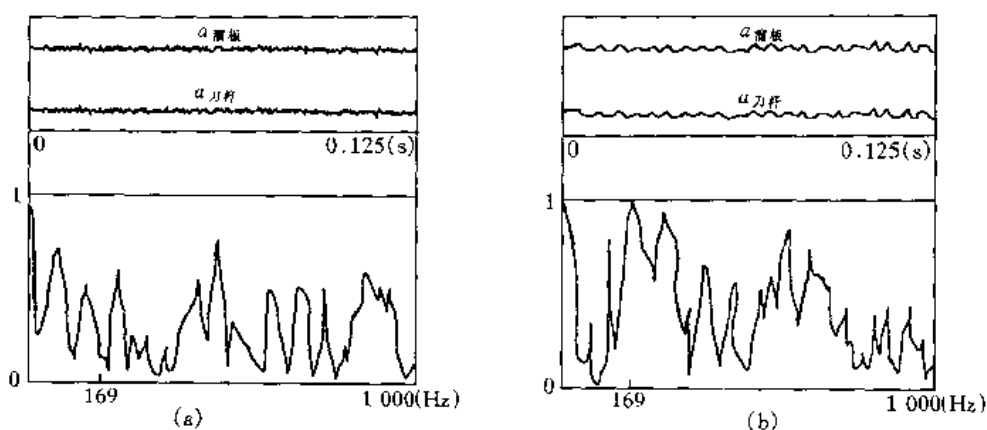


图 6.10-5 C6150 机床二测点时域信号及相干函数
(a)平稳切削;(b)颤振切削

6.11 模态分析在声控方面的应用

声音控制包括振动的利用及对噪声的抑制两个方面。在振动利用方面,模态分析在音箱设计、大钟设计等实例中均收到良好效果。在噪声控制方面,模态分析应用的例子也很多,包括对噪声源的寻找和确定产生噪声的模态及由此提出的降噪措施。下面介绍一个噪声抑制方面的实例。

噪声控制是振动控制中的一个比较困难的问题。如汽车噪声的产生有多种因素,包括来自排气系统、发动机、变速器等几方面的噪声,而变速器齿轮传动产生的噪声尤为突出。

BCB131 汽车变速器为具有同步器的五级变速器,内部为齿轮传动系统,外部为壳体。对噪声的研究分为:确定有效噪声源、确定降噪方案、确定实施部位和效果分析等四个步骤。

1. 确定有效噪声源

变速器噪声的直接来源是齿轮齿形误差、齿轮几何偏心或运动偏心产生的周向、径向和轴向振动。其辐射途径有两种,一种是从传动系统通过空气直接向外传播;另一种是通过变速器外壳向外传播,或说是引起壳体振动向外辐射噪声。为了确定这两种途径以哪种为主,首先采用 ISO3744 标准,测量变速器在不同转速下的各挡位噪声级。然后,对变速器壳体振动信号和齿轮噪声信号进行相干分析。壳体振动信号谱和噪声谱如图 6.11-1(a)(b)所示,相干函数如图 6.11-1(c)所示。结果表明,两种信号相干性较好,从而确定噪声辐射的主要途径是壳体振动。因此,抑制壳体振动可有效地降低噪声辐射。

2. 确定降噪方案

壳体为金属薄壁结构,阻尼较小,高频噪声一般对阻尼较敏感,而频谱分析表明 1 260 Hz 处的噪声能量最大,属高频噪声。因此确定采用贴片阻尼法增加阻尼系数,以降低噪声。根据环境条件,决定采用丁基胶粘弹性阻尼材料,将壳体贴阻尼片后结构看作约束阻尼板,通过优化方法确定阻尼层厚度和约束板厚度。

3. 确定实施部位

阻尼片贴于壳体何处能达到最佳效果是确定实施的关键。根据灵敏度分析,振型中变形较大的部位对物理参数变化较敏感。因此,应首先确定这些部位,特别是对应噪声能量大的模

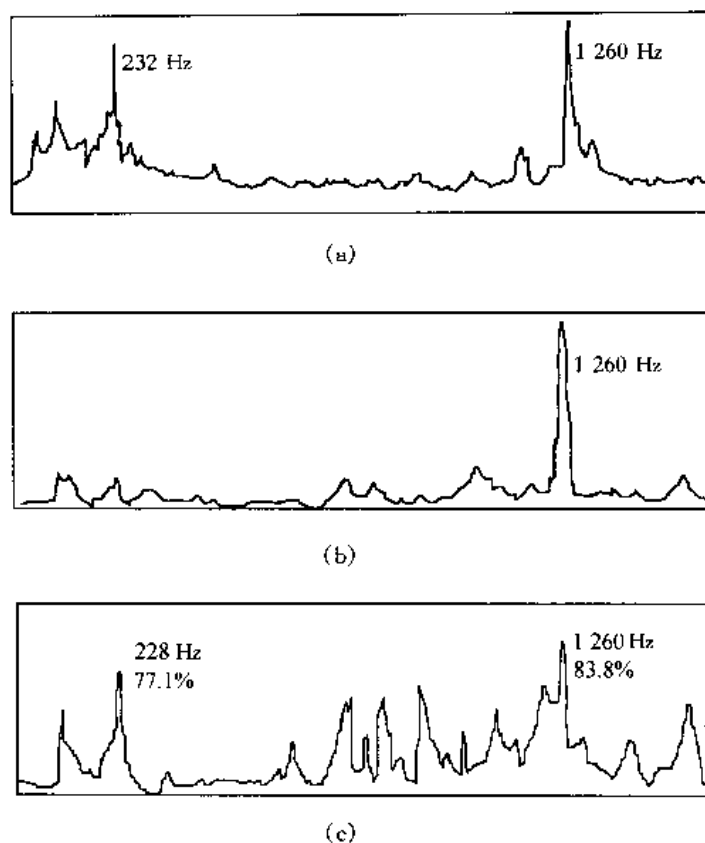


图 6.11-1 壳体振动谱与噪声谱及其相干函数

(a)壳体振动谱;(b)噪声谱;(c)相干函数

态振型。

通过模态试验分析,求得变速器前 10 阶模态参数,如表 6.11-1。其中第 5 阶频率 1 258.4 Hz 对应噪声谱和壳体响应谱的最大能量处(1 260 Hz)。因此,该阶振型为产生噪声的主要振型,变形较大处即为贴片部位。

表 6.11-1 变速器前 10 阶模态参数

阶 数	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
模态频率 (Hz)	528.3	660.6	847.5	932.2	1 258.4	1 396.3	1 640.0	1 924.1	2 081.8	2 270.0
阻尼比(%)	8.373	3.314	5.962	8.752	4.272	4.551	7.402	6.385	3.829	3.009

4. 效果分析

表 6.11-2 给出了变速器外壳未加贴片和加贴片后的噪声级。结果表明,这种降噪方法效果显著。

表 6.11-2 阻尼贴片前后噪声级比较

[dB(A)]

	倒 挡			V 挡		
	贴片前	贴片后	声级变化	贴片前	贴片后	声级变化
1 000 r/min	84.4	82.3	-2.1	85.5	83.1	-2.4
1 500 r/min	88.8	86.8	-2.0	89.9	87.5	-2.4
2 000 r/min	91.2	88.9	-2.3	93.1	91.3	-1.8
2 500 r/min	92.7	90.8	-1.9	94.8	92.4	-2.4

思 考 题

1. 模态分析常在工程中哪些方面得到应用?
2. 模态分析在结构动态设计应用中的方法繁多,可归为哪几类?其关系如何?
3. 载荷识别有哪几类方法?
4. 介绍载荷识别频域法中常用几种方法的基本过程。
5. 灵敏度如何定义?常有哪几种灵敏度?做灵敏度分析的目的是什么?
6. 特征值灵敏度与特征矢量灵敏度如何定义?一般而言,结构上哪些部位特征灵敏度较大?
7. 为什么从复模态特征值灵敏度可直接推出无阻尼系统特征值灵敏度,而不能直接推出特征矢量灵敏度?
8. 为做物理参数修改,需要 FEM 和 EMA 模型物理参数矩阵阶数相同,而一般 FEM 模型物理参数矩阵的阶数远大于 EMA 模型,如何处理?常有哪几种方法?
9. 简述 J. C. Chen 矩阵摄动法、Berman 约束优化法、特征灵敏度法的基本思想。三种方法有何特点?
10. 物理参数识别与物理参数修改有何不同?
11. 物理参数识别常有哪几种方法?
12. 再分析与物理参数修改是何关系?
13. 再分析常有哪几种方法?
14. 子结构综合法的两种方法如何统一?
15. 什么是结构优化设计?

附录 模态分析实验指导书

在模态分析课程实验中包括以下两部分内容：

- (1)传递函数的测量；
- (2)振动结构的实验模态分析。

实验 1 传递函数的测量

一、实验内容

用锤击激振法、随机激振法测量传递函数。

二、实验目的

(1)掌握测量传递函数常用的锤击激振法和随机信号激振法,并了解快速正弦扫描激振法、猝发随机激振法。

- (2)测量激励力和加速度响应的时间记录曲线、力的自功率谱和传递函数。
- (3)分析传递函数的各种显示形式(实部、虚部、幅值、对数、相位)及相干函数。
- (4)比较原点传递函数和跨点传递函数的特征。
- (5)考察激励点和响应点互换对传递函数的影响。
- (6)比较不同材料的力锤锤帽对激励信号的影响。
- (7)观察抗混滤波器对分析结果的影响。

三、实验仪器

实验仪器包括力锤、力传感器、加速度计、电荷放大器、正弦随机信号发生器、功率放大器、激振器、信号采集分析系统。

力锤和激振器用于激励实验对象。

力传感器用于拾取激励信号并转换成为电荷信号。

加速度计用于拾取响应信号并转换成为电荷信号。

电荷放大器用于将电荷信号放大成为适合测量的电压信号。

正弦随机信号发生器、功率放大器是提供随机激励的信号源并进行功率输出。

信号采集分析系统包括抗混滤波器、A/D 变换器、结构动态分析软件、计算机、打印机。

四、实验数据采集

1. 锤击激振法

用安装有力传感器的力锤敲击实验对象上的某一点。力传感器拾取激励力的信号,安装

在实验对象的某测点上的加速度计拾取响应信号,经电荷放大器放大后输入信号采集系统。实验仪器框图如图 1 所示。

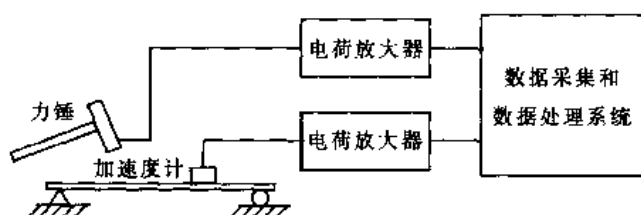


图 1 冲击激振实验仪器框图

(1)仪器操作要点如下:

- ①力信号必须接入信号采集器的第 1 通道,响应信号依次接入信号采集器的其他通道;
- ②在信号采集分析系统上设置适当的参数,首先设置采集参数,如试验名(ASCII 码)、试验号(数字)、数据路径、结果路径、采样类型(多次触发)、单位类型(可变)、设置工程单位和标定值;
- ③采样菜单中选用多次触发,设置相应的参数,开始采样。
- (2)敲击传感器附近的测点,测量原点传递函数。
- (3)敲击远离传感器的其他测点,测量跨点传递函数。
- (4)互换激励点和响应点的位置,测量激励点和响应点互换时的传递函数。
- (5)适当改变激振力的大小,测量传递函数。
- (6)在锤击激振法中改用不同材料的力传感器的锤帽,测量激励力的自谱。
- (7)设置抗混滤波器的截止频率大于分析频率,继续测量传递函数。

2. 随机激振法

由正弦随机信号发生器产生窄带随机信号,通过功率放大器放大后送入激振器,激励安装在实验对象测点上的力传感器。力传感器和加速度计分别拾取激励信号和响应信号,经电荷放大器放大后输入信号采集系统。实验仪器框图如图 2 所示。

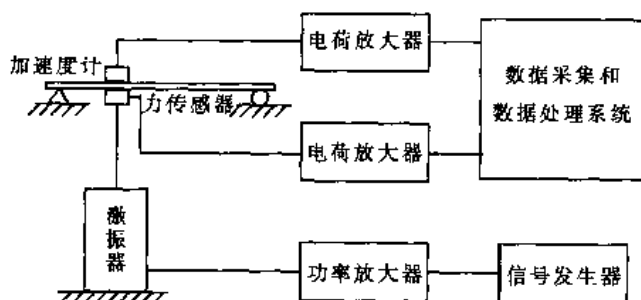


图 2 随机信号激振实验仪器框图

在信号采集分析系统上设置适当的参数,分析激励力和加速度响应的时域记录、力的自功率谱和传递函数(实部、虚部、幅值、对数幅值)。

(1)仪器操作要点如下:

- ①力信号必须接入信号采集器的第 1 通道,响应信号依次接入信号采集器的其他通道;
- ②改变信号采集分析系统设置参数菜单中采样类型为随机采样;
- ③采样菜单中选用随机采样,设置相应的参数,开始采样。

(2)测量原点传递函数。

五、实验数据分析

在以上实验中分别记录、分析以下内容：

- (1)激励力和响应的时间记录。
- (2)原点传递函数(实部、虚部、幅频(线性和对数)、相频和相干函数)。
- (3)跨点传递函数(实部、虚部、幅频(线性和对数)、相频和相干函数)。
- (4)激励点和响应点互换的传递函数(传递函数的幅频形式)。
- (5)改变激励力大小的传递函数(传递函数的幅频形式)。
- (6)不同材料的锤帽激励力的自谱(自谱的对数形式)。
- (7)抗混滤波器不同截止频率下的频率混淆现象(传递函数幅频形式)。
- (8)随机激振法激励力和响应的时间记录曲线、力的自谱、传递函数。

六、实验分析

分析、总结以下实验内容：

- (1)传递函数的测量方法。
- (2)原点传递函数和跨点传递函数的特征。
- (3)激励点和响应点互换对传递函数的影响。
- (4)力锤锤帽的材料的选择对激励信号的影响。
- (5)抗混淆滤波器对分析结果的影响。

实验 2 振动结构的实验模态分析

一、实验内容

用锤击激振法测量振动结构的模态参数。

二、实验目的

- (1)通过实验模态分析实验的全过程,了解实验模态分析的基本方法。
- (2)了解模态分析软件的使用方法。

三、实验仪器

力锤、力传感器、加速度计、电荷放大器、信号采集分析系统(参见实验 1)

四、实验步骤

- (1)在振动系统上选取适当的测量点,在模态分析软件上输入坐标表、连接顺序表,画出结构的测点图。
- (2)在信号采集分析系统上设置适当的参数,用锤击激振法采集激励力的信号和每一测点的响应信号。

- (3)在分析软件上分析各测点的传递函数。
- (4)在分析软件上填入约束表。
- (5)通过传递函数的曲线拟合识别出振动系统的模态参数及振型。

五、实验分析

掌握实验模态分析方法的全过程。在以上实验中分别记录以下内容：

- (1)振动系统各测点传递函数和相干函数的图形。
- (2)振动系统各测点的坐标表。
- (3)振动系统的频率阻尼表和模态参数表。
- (4)振动系统的振型图。

参 考 文 献

- 1 萧龙翔. 振动结构模态分析基础. 天津: 天津大学力学系, 1991
- 2 周传荣, 赵淳生. 机械振动参数识别及其应用. 北京: 科学出版社, 1989
- 3 傅志方主编. 振动模态分析与参数辨识. 北京: 机械工业出版社, 1990
- 4 大久保信行著. 机械模态分析. 尹传家译. 上海: 上海交通大学出版社, 1985
- 5 方远翔, 陈安宁, 董卫平. 振动模态分析技术. 北京: 国防工业出版社, 1993
- 6 Ewins D J. Modal Testing: Theory and Practice. RSPL(11), 1986
- 7 王建中, 周亚明. 机械结构动态分析与设计. 武汉: 武汉工业大学出版社, 1995
- 8 温熙森, 陈循, 唐丙阳. 机械系统动态分析理论与应用. 长沙: 国防科技大学出版社, 1998
- 9 数学手册编写组. 数学手册. 北京: 高等教育出版社, 1979
- 10 丁学仁, 蔡高厅. 工程中的矩阵理论. 天津: 天津大学出版社, 1985
- 11 韩京清, 何关钰, 许可康. 线性系统理论代数基础. 沈阳: 辽宁科学技术出版社, 1985
- 12 汤姆逊著. 振动理论及其应用. 胡宗武等译. 北京: 煤炭工业出版社, 1980
- 13 胡海昌. 多自由度结构固有振动理论. 北京: 科学出版社, 1987
- 14 倪振华. 振动力学. 西安: 西安交通大学出版社, 1989
- 15 唐照千, 黄文虎主编. 振动与冲击手册(第1卷). 北京: 国防工业出版社, 1988
- 16 王文亮, 杜作润. 结构振动与动态子结构方法. 上海: 复旦大学出版社, 1985
- 17 贝达特, 皮尔索著. 随机数据分析方法. 凌福根译. 北京: 国防工业出版社, 1976
- 18 纽兰著. 随机振动与谱分析概论. 方同, 黄嘉璜译. 北京: 机械工业出版社, 1980
- 19 李岳峰, 吕民富. 多输入—多输出频响函数估计. 航空学报, 1986, 7(6): 596~603
- 20 张大钧. 北京型内燃机车车体的模态分析. [硕士学位论文]. 天津: 天津大学, 1987
- 21 张大钧, 张文德, 萧龙翔. 随机冲击激励方法. 全国第五届模态分析与试验学术交流会论文集(上), 1988: 76~86
- 22 萧龙翔, 张大钧, 霍拳忠等. BJ-3型内燃机车车体的实验模态分析. 第三届全国振动理论及应用学术会议论文集(中), 1987: 1144~1150
- 23 张大钧, 萧龙翔, 霍拳忠. 北京型内燃机车车体的试验模态分析. 铁道学报, 1990, 12(2): 1~9
- 24 李方泽, 刘馥清, 王正. 工程振动测试与分析. 北京: 高等教育出版社, 1992
- 25 刘习军, 贾启芬, 张文德. 工程振动与测试技术. 天津: 天津大学出版社, 1999
- 26 奥本海姆, 谢弗著. 数字信号处理. 董士嘉, 杨耀增译. 北京: 科学出版社, 1981
- 27 张阿舟主编. 振动数字信号处理程序库. 北京: 科学出版社, 1988
- 28 威佛著. 离散和连续傅里叶分析理论. 王中德等译. 北京: 北京邮电学院出版社, 1991
- 29 帕普里斯著. 信号分析. 李启虎等译. 青岛: 海洋出版社, 1981
- 30 张令弥, 姚迎宪. 频率响应函数估计的进展. 机械强度, 1989, 11(1): 15~17, 44
- 31 张存良, 门玉贵, 孙衍全. 低相干函数频响函数的无偏差估计方法. 振动工程学报, 1993, 6(2): 187~193
- 32 黄方林, 顾松年. 频响函数一种新的估计方法. 振动与冲击, 1992(4): 29~35
- 33 Ibrahim S R. Modal identification techniques assessment and comparison. Proc. of 3rd IMAC, 1985: 831~839
- 34 Whitfield A H. Transfer function synthesis using frequency response data. Int. J. of Control, 1986, 43(5): 1413~1426

- 35 夏天长著.系统辨识最小二乘法.熊光楞,李云芳译.北京:清华大学出版社,1983
- 36 王松佳,杨振海.广义逆矩阵及其应用.北京:北京工业大学出版社,1996
- 37 张成乾,张国强.系统辨识与参数估计.北京:机械工业出版社,1986
- 38 Levy E C. Complex-curve fitting. IRE Trans. Auto Control, 1959, 4(1):37~43
- 39 Filloz R, Lallement G, Piranda J, et al. Global method of modal identification. Proc. of 3rd IMAC, 1985: 1145~1151
- 40 Zhang L M, Kanda H, Brown D L, et al. A polyreference frequency domain method for modal parameter identification. ASME Paper, Number 85-Det-106
- 41 李岳峰,吕民富.模态参数的一种多输入/多输出频域总体识别法.振动工程学报,1990,3(2):1~6
- 42 Cafeo J A, De Clerck J P. An assessment function for improving the accuracy of estimated modal parameters, ASME Modal Analysis, 1995, 10(4):236~259
- 43 Xu K Q. Frequency domain modal parameters identification of high order systems in a numerically stable way. ASME Journal of Vibration and acoustics, 1997, 119:265~270
- 44 Cole H A. On-line failure detection and damping measurement of aerospace structures by random decrement signatures. NASA CR-2205, 1973
- 45 Ibrahim S R, Mikulcik E C. A method for the direct identification of vibration parameters from the free response. The Shock and Vibration Bulletin, 1977, Bull. 47, Part 4:183~198
- 46 Ibrahim S R. Random decrement technique for modal identification of structures. AIAA J. of Spacecraft and Rockets, 1977, 14(11):696~700
- 47 Ibrahim S R. Modal confidence factor in vibration testing. AIAA J. of Spacecraft and Rockets, 1978, 15(5): 313~316
- 48 Brown D, Allenang R, Zimmerman R, et al. Parameter estimation techniques for modal analysis, DAE Paper, No. 790221, SAE Trans., 1979, 88(1): 828~846
- 49 Mergeay M. Least squares complex exponential method and global system parameter estimation used by modal analysis. Proc. of 8th IMAC, 1983
- 50 Pandit S M, Wu S M. Time series and system analysis with applications. New York: Wiley, 1983
- 51 Vold H, Kundrat J, Rocklin G T, et al. A multi-input modal estimation algorithm for mini-computers. SAE Paper, No. 820194, SAE Trans., 1982, 91(1): 815~821
- 52 Vold H, Rocklin G T. The numerical implementation of a multi input modal estimation method for minicomputer. Proc. of 1th IMAC, 1982:542~548
- 53 Vold H, Russell R. Advanced analysis methods improve modal test results. Sound and Vibration, Mar. 1983:36~40
- 54 Juang J N, Pappa R. An eigensystem realization algorithm for modal parameter identification and model reduction. J. of Guidance, Control and Dynamics, 1985, 8(5): 620~627
- 55 Leuridan J M, Brown D L, Allemang R J. Time domain parameter identification methods for linear modal analysis: a unifying approach. J. of Vibration, Acoustics, Stress, and Reliability in Design, 1986, 108:1~8
- 56 夏益霖,杨永新.多输入—多输出时域模态参数识别方法的系统实现理论.全国第五届模态分析与实验学术交流会议论文集(下),1988:590~598
- 57 管迪华,潘旭峰.模态参数识别 ITD、ERA 算法的最小实现原理分析.第三届全国振动理论及应用学术会议论文集(中),1987:1233~1238
- 58 王卫东,张世基,诸德超.时域模态参数识别的直接特征系统实现算法.力学学报,1993,25(5):575~581
- 59 刘豹.现代控制理论.北京:机械工业出版社,1992
- 60 天津大学力学系. ZKB3675 改进筛空载实验模态分析总结.天津大学力学系测试报告,1993

- 61 天津大学水资源与港湾工程系. 二滩拱坝水垫塘工作条件防护措施及泄洪对坝体影响. 天津大学水资源与港湾工程系研究报告, 1990
- 62 刘恒春, 朱德懋, 孙久厚. 振动载荷识别的奇异值分解法. 振动工程学报, 1990, 3(1): 24~33
- 63 陈国金, 周铁尘. 应用时域模态坐标转换法识别内燃机缸内气体压力. 振动工程学报, 1989, 2(3): 66~72
- 64 赵玉成, 袁树清, 李舜酩等. 动态载荷的小波正交算子变换识别法. 机械强度, 1998, 20(2): 127~130, 133
- 65 张方, 朱德懋, 张福祥. 动载荷识别的时间有限元模型理论及其应用. 振动与冲击, 1998, 17(2): 1~4
- 66 张方, 朱德懋. 基于神经网络模型的动载荷识别. 振动工程学报, 1997, 10(2): 156~162
- 67 林家浩. 结构动力优化中的灵敏度分析. 振动与冲击, 1985, (1): 1~6
- 68 瞿祖清, 华宏星, 傅志方. 一种粘性阻尼系统频域响应灵敏度计算方法. 振动工程学报, 1998, 11(4): 457~461
- 69 瞿祖清, 华宏星, 傅志方. 一种频响函数灵敏度分析方法. 机械强度, 1999, 21(2): 95~97
- 70 何忠韬. 用逆特征灵敏度预估有阻尼振动系统动力稳定性最佳修改方向. 振动与冲击, 1996, 15(3): 65~70
- 71 顾松年. 结构动力修改的发展与现状. 机械强度, 1991, 13(1): 1~9, 21
- 72 魏来生. 结构有限元动态模型修正方法综述. 振动与冲击, 1998, 17(3): 43~46, 81
- 73 Chen J C, Garba J A. Matrix perturbation for analytical model improvement. AIAA Paper, 79-0831, 1979
- 74 Chen J C, et al. Direct structural parameter identification by modal test results. AIAA Paper, 83-0812, 1983
- 75 Berman A. Mass matrix correction using an incomplete set of measured modes. AIAA J., 1979, 17(10): 1147~1148
- 76 Wei F S. Stiffness matrix correction from incomplete test data. AIAA J., 1980, 18(10): 1274~1275
- 77 彭晓洪, 丁锡洪, 周建功. 用模态参数识别结果对实际结构有限元动力模型的修正. 振动与冲击, 1984, (3): 8~15
- 78 Kabe A M. Stiffness matrix adjustment using mode data. AIAA J., 1985, 23(9): 1431~1436
- 79 夏益霖. 结构有限元模型修正的频响函数方法. 振动工程学报, 1993, 6(4): 376~379
- 80 张宪民, 刘宏昭, 曹惟庆. 应用试验模态参数修正理论模型的最佳矩阵逼近法. 振动工程学报, 1994, 7(1): 70~79
- 81 向锦武, 周传荣, 张阿舟. 基于建模误差位置识别的有限元模型修正方法. 振动工程学报, 1997, 10(1): 1~7
- 82 蔡国平, 赵玉成, 王超. BP神经网络理论在模型修正中的应用. 机械强度, 1998, 20(4): 280~283
- 83 Guyan R J. Reduction of stiffness and mass matrices. AIAA J., 1965, (3): 380
- 84 Irons B M. Structural eigenvalue problems: elimination of unwanted variables. AIAA J., 1965, (3): 961~962
- 85 Paz Mario. Dynamic condensation method. AIAA J., 1984, 22(5): 724~727
- 86 O' Callahan J. A procedure for an improved reduced system(IRS) model. Proc. of 7th IMAC, 1989: 21~27
- 87 格拉德威尔著. 振动中的反问题. 王大钧, 何兆昌译. 北京: 北京大学出版社, 1991
- 88 郑全逸. 有阻尼质量弹簧系统逆特征值问题的一种解法. 应用力学学报, 1990, 7(3): 109~113
- 89 Hwang H Y. Identification techniques of structure connection parameters using frequency response functions. Journal of Sound and Vibration, 1998, 212(3): 469~479
- 90 张希农. 局部结构动力修改的频率响应函数方法. 应用力学学报, 1991, 8(2): 58~65
- 91 徐燕申主编. 机械动态设计. 北京: 机械工业出版社, 1992
- 92 程耿东, 顾元宪, 王健. 我国机械优化研究与应用的综合和展望. 机械强度, 1995, 17(2): 68~74
- 93 成志清. 对结构动力学设计中若干问题的思考. 振动、测试与诊断, 1994, 14(2): 1~5
- 94 成志清, 陈怀海. 机翼颤振模型的结构动力学设计. 振动工程学报, 1995, 8(2): 184~189
- 95 傅志方, 佟德纯, 韩祖舜. 模态分析在航空发动机振动故障分析中的应用. 应用力学学报, 1991, 8(1): 99~

- 96 万小毛,赵淳生.桩身完整性检测技术综述.振动、测试与诊断,1992,12(2):37~45
- 97 刘爱群,李荣.模态分析法在粘弹性阻尼结构设计中的应用.全国第五届模态分析与试验学术交流会论文集(上),1988:181~188
- 98 Yushu Chen and Andrew Y T. Bifurcation and Chaos in Engineering. London: Springer-Verlag, 1998
- 99 吴志强.多自由度非线性系统的非线性模态及 Normal Form 直接方法:[博士学位论文].天津:天津大学,1996

